

Modelos Matemáticos para Estruturas a Prazo de Taxas de Juro

Duarte Matos Gama Vieira Carregueiro

Mestrado em Engenharia Matemática

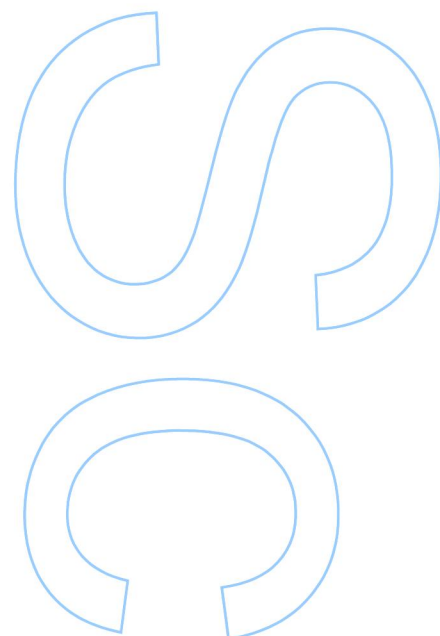
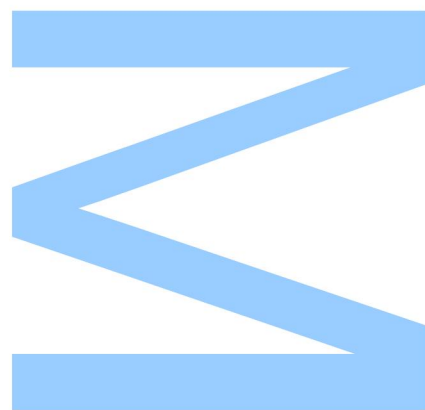
Departamento de Matemática

2017

Orientador

Professor Doutor Carlos Miguel de Menezes,

Professor Auxiliar, Faculdade de Ciências da Universidade do Porto

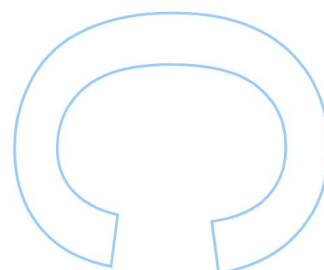
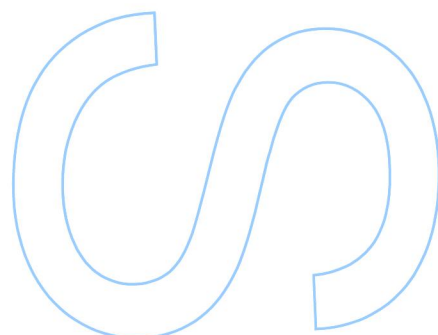
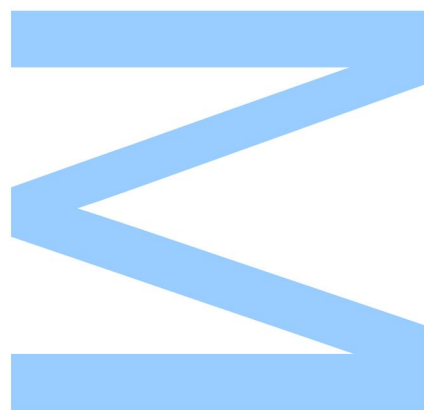




Todas as correções determinadas pelo júri, e só essas, foram efetuadas.

O Presidente do Júri,

Porto, ____/____/____



À minha avó Clementina e ao meu avô Zé.

Agradecimentos

Esta secção é dedicada aos que me têm acompanhado no meu percurso académico, em especial, no período que dediquei ao Mestrado em Engenharia Matemática e a esta tese. Os agradecimentos aqui prestados não representarão seguramente toda a gratidão que sinto.

Ao Professor Doutor Carlos Miguel de Menezes, agradeço a partilha, a oportunidade de aprender, na verdadeira acepção da palavra, com as suas enormes valias profissionais, académicas e pessoais, e o seu acompanhamento nesta tese. Sinto-me privilegiado por ter partilhado comigo a sua vasta experiência e o seu tempo. Desafiou-me a tentar chegar sempre mais longe. Serão sempre poucas as palavras para descrever a minha franca admiração pela sua pessoa.

À Comissão Científica do Mestrado em Engenharia Matemática, agradeço toda a dedicação e zelo pelo bom funcionamento do curso. Agradeço em particular à Professora Doutora Teresa Mendonça pela disponibilidade sempre demonstrada e enorme atenção dedicada aos alunos e às suas perspectivas.

Ao corpo docente do Mestrado em Engenharia Matemática agradeço as ferramentas que me foram por si providenciadas assim como a sua dedicação.

À Professora Doutora Paula Sarmento da Faculdade de Economia da Universidade do Porto por ter facilitado o contacto com a Direção da Biblioteca da FEP permitindo acrescentar valor a esta tese. Agradeço também a simpatia de todos os técnicos da biblioteca que sempre me receberam muito bem.

Ao *Millennium-BCP*, na pessoa do Doutor Manuel Gonçalves, responsável da *Área de Analytics e Modelos de Decisão (AAMD)*, agradeço todo o apoio e compreensão prestados. A sua sensibilidade relativamente ao tema da tese foi determinante para a conclusão dos trabalhos.

Uma palavra de agradecimento à Doutora Joana Rocha, minha orientadora de estágio, pela preocupação sempre demonstrada e pelas palavras sábias que tantas vezes me confortaram. Fica também o meu sincero agradecimento a todo e cada um dos elementos

da *AAMD* pela integração fantástica na equipa e que me possibilitou gerir melhor o meu tempo.

Aos meus colegas de faculdade agradeço a cooperação tantas vezes necessária para o sucesso comum. A eles dedico palavras de amizade e votos de sucessos futuros.

Aos meus amigos agradeço precisamente a amizade e também o seu apoio e a sua compreensão.

Agradeço finalmente à minha família. Aos meus pais não só pelo trajeto académico que me proporcionaram mas também pelos valores e carinho que me transmitem. O seu apoio foi sempre fundamental. À minha avó Silvina pela força que me demonstra.

À Sofia agradeço toda a compreensão, motivação e carinho que me dedicou. Tem sido uma verdadeira companheira ao longo destes seis anos.

Resumo

Desde os anos 70 do século XX, altura em que os mercados financeiros começaram a ter maior liquidez, têm sido publicados inúmeros modelos matemáticos com aplicações por exemplo na previsão de preços/taxas de juro ou na análise do risco associado a um portfólio.

Nesta tese o foco recaiu inicialmente sobre a família de modelos HJM[14] de volatilidade determinística com o objetivo de aplicações em trabalhos futuros a modelos de volatilidade estocástica. O último capítulo da tese é dedicado à descrição do amplamente utilizado modelo SABR[13]. Foram introduzidos métodos alternativos para a sua calibração e estimação da densidade do preços futuros condicionada pelos acontecimentos passados, incluindo métodos de Monte Carlo. Apresentam-se alguns resultados da implementação computacional deste modelo.

Abstract

Since the 1970's, when financial markets began to have greater liquidity, numerous mathematical models have been published with applications, for instance, to forecast prices/interest rates, or for risk analysis of financial portfolios. In this thesis the initial focus was on the discrete version of the HJM family of models[14] of deterministic volatility and with the aim of possible applications in a future work to stochastic volatility models. The last chapter of the thesis focus on the description of the broadly used SABR model[13], methods for its calibration and density estimation of future prices conditioned on past events, including Monte Carlo methods. Some results from the computational implementation of this model are presented.

Palavras-chave

Modelação Matemática, Taxas de Juro, HJM, Volatilidade Implícita, SABR, Volatility Stripping, Modelos de Volatilidade.

Conteúdo

Índice de Tabelas	xiii
-------------------	------

Índice de Figuras	xv
-------------------	----

1 Mercados Financeiros em tempo discreto	1
1.1 Modelo geral de um mercado financeiro em tempo discreto	1
1.1.1 Taxas de rentabilidade	5
1.2 Arbitragem	5
1.3 Teoremas fundamentais sobre os preços num mercado financeiro	6
1.3.1 Preço de um derivado financeiro	8
1.3.2 Opções europeias	10
1.4 Estrutura a prazo das taxas de juro	11
1.4.1 Exemplos de taxas de juro de mercado	15
1.5 <i>Swaps</i> ou permutas de <i>cashflows</i>	16
1.5.1 Exemplos de taxas de juro em contratos de <i>swap</i>	21
1.5.2 Preço de um <i>caplet</i>	22
1.5.3 Preço de um <i>cap</i>	22
1.5.4 Preço de uma opção de <i>swap</i>	23
1.6 Modelos para a estrutura a prazo de taxas de juro	25
1.6.1 Método de <i>bootstrapping</i>	25
1.6.2 Método de McCulloch	26
1.6.3 Modelo de Nelson-Siegel-Svensson	26
1.7 Convenções de mercado	28
1.7.1 Métodos de contagem de dias	28
1.8 Dados de mercado	29
2 Modelo HJM em tempo discreto	31
2.1 Perturbações estocásticas	31

2.1.1	Processo das taxas de juro à vista	33
2.1.2	Processo dos preços descontados	33
2.2	Considerações sobre as perturbações aleatórias	35
2.3	Modelo de Ho-Lee multinomial	38
3	Modelos de volatilidade	43
3.1	Volatilidade implícita e volatilidade local	43
3.2	Stripping/Desmantelamento da volatilidade	50
4	Modelo SABR	55
4.1	Descrição do modelo SABR	55
4.1.1	Interpretação dos parâmetros	56
4.1.2	Densidade de Probabilidade de um preço futuro	58
4.2	Ajustamento smile	61
4.2.1	Aproximação de Hagan normal	61
4.2.2	Aproximação de Hagan lognormal	62
4.3	Calibração do modelo SABR	63
4.3.1	Parâmetros iniciais	63
4.4	Função de densidade de probabilidade	68
4.4.1	Geração de variáveis aleatórias correlacionadas	68
4.4.2	Discretização do modelo SABR	69
4.4.3	Densidade de probabilidade	71
4.4.4	Resultados para taxas de swap associadas à taxa EURIBOR a 6 meses	73
4.4.5	Resultados para a taxa EURIBOR a 6 meses	74
	Apêndices	79

Lista de Tabelas

1.1	Excerto dos dados retirados do <i>Swap Pricer</i> para swaptions de 2014-03-17.	29
4.1	Parâmetros obtidos para o melhor ajustamento: ARNH2O. Fixou-se $\beta = 0.5$	69
2	Descrição de algumas funções programadas: taxas de juro, datas e stripping da volatilidade.	81
3	Descrição de algumas funções programadas: calibração do modelo SABR e cálculo da densidade de probabilidade de preços futuros.	82
4	Descrição de alguns grupos de funções criados.	83

Lista de Figuras

3.1	Volatilidade normal de caps de mercado em 04-04-2014.	45
3.2	Volatilidade lognormal de mercado swaptions de tenor 10 anos em 17-03-2014.	46
4.1	Análise de sensibilidade: swaption a 10 anos com maturidade residual igual a 3 anos, com início a <i>2014-03-17</i> sendo a taxa de juro a prazo aproximadamente 0.027.	57
4.2	Ajustamento ao smile de swaptions a 10 anos com maturidade residual igual a 3 anos, com início a <i>2014-03-17</i> sendo a taxa de juro a prazo aproximadamente 0.027.	66
4.3	Distribuição dos erros por preço de exercício e por metodologia utilizada.	67
4.4	Distribuição dos erros por maturidade residual da opção e por metodologia utilizada.	68
4.5	Caminhos aleatórios médios obtidos para os processos F e α da taxa de juro de swap a 3 meses com tenor de 10 anos com dados de 17-03-2014 . $N_{step} = 27$ e $N_{sim} = 10^4$	73
4.6	Caminhos aleatórios médios obtidos para os processos F e α da taxa de juro de swap a prazo a 10 anos com tenor de 10 anos com dados de 17-03-2014. $N_{step} = 236$ e $N_{sim} = 10^4$	73
4.7	Funções de densidade de probabilidade e de distribuição da taxa de juro de swap F a prazo a 3 meses com tenor de 10 anos com dados de 17-03-2014.	74
4.8	Funções de densidade de probabilidade e de distribuição da taxa de juro de swap F a prazo a 10 anos com tenor de 10 anos com dados de 17-03-2014.	74
4.9	Funções de densidade de probabilidade e de distribuição da EURIBOR a 6 meses considerando caplets a 3 anos de 17-03-2014.	75
4.10	Funções de densidade de probabilidade e de distribuição da EURIBOR a 6 meses considerando caplets a 8 anos e 6 meses de 17-03-2014.	75

Lista de Abreviaturas

- u.m. - unidade monetária;
- ZCB - Zero Coupon Bond;
- IRS - Interest Rate Swap;
- OTC - Over the counter;
- ATM - At The Money;
- ITM - In The Money;
- OTM - Out of The Money;
- FRA - Forward Rate Agreement;
- ICE - International Currency Exchange;
- EUR - Euro;
- GBP - Libra Esterlina;
- JPY - Yen Japonês;
- CHF - Franco Suíço;
- CEV - Constant Elasticity of Variance;
- IC_{95} - Intervalo de confiança a 95% para a média.

Introdução

A Matemática tem desempenhado um papel fundamental na modelação da estocasticidade associada aos fenómenos dos mercados económico-financeiros.

Desde os anos 70 do século XX, altura em que os mercados financeiros começaram a ter maior liquidez, têm sido publicados inúmeros modelos matemáticos com aplicações por exemplo na previsão de preços/taxas de juro ou na análise do risco associado a um portfólio.

Um dos modelos com maior destaque desde então é o modelo de Black-Scholes[5] que descreve o preço de um ativo financeiro como um processo estocástico cuja componente de volatilidade é constante. Deste modelo resulta a fórmula de Black-Scholes para o cálculo do preço livre de arbitragem de opções europeias, a qual levou a várias reformulações da abordagem original devido às limitações inerentes ao facto da volatilidade ser considerada constante.

Mais tarde, surgiram modelos de volatilidade determinística, seguindo-se modelos de volatilidade local e finalmente modelos de volatilidade estocástica.

Nesta tese o foco recaiu inicialmente sobre os modelos HJM[14] e de Ho-Lee[16] de volatilidade determinística e, mais tarde, no modelo SABR[13] de volatilidade estocástica. O modelo de HJM é um modelo para a taxa de juro instantânea a prazo que constituiu à época uma forma de introduzir componentes aleatórias correlacionadas na estimação da estrutura a prazo das taxas de juro. Nesta tese apresenta-se uma versão discreta do modelo HJM como extensão do modelo original (na sua versão discreta) ao caso em que tem número finito de componentes estocásticas que por sua vez têm um número finito, não necessariamente igual, de valores que podem tomar. O modelo de Ho-Lee é introduzido como caso particular do modelo HJM mas também numa versão multinomial (foi originalmente introduzido como modelo binomial). O modelo HJM tem aplicações em modelos de volatilidade estocástica revelando-se uma referência importante.

Nos modelos de volatilidade local a volatilidade é função do preço do ativo financeiro e do tempo. Usando a fórmula de Dupire expressou-se a volatilidade local como função da

volatilidade implícita de Black. Os modelos de volatilidade local não foram objecto de estudo aprofundado. Finalmente os modelos de volatilidade estocástica são modelos em que a própria volatilidade é governada por uma equação diferencial estocástica. Grande parte do trabalho desenvolvido recaiu no estudo de um desses modelos: o modelo SABR que é usado no mercado em larga escala. Assim procurou-se reunir alguns resultados publicados nas referências estudadas relativos ao modelo fornecendo as ferramentas teóricas necessárias para que a sua implementação seja possível. Para o efeito desenvolveu-se *software* em *R* de relativa complexidade com que se obtiveram os resultados.

No decorrer do trabalho foram utilizados dados da Thomson Reuters referentes à volatilidade de mercado de derivados financeiros transacionados *over-the-counter* (OTC) e dados das curvas de desconto utilizadas.

No capítulo 1 descrevem-se os pressupostos de um mercado financeiro em tempo discreto, definem-se conceitos-chave como arbitragem, estrutura a prazo, taxa de juro e dívida contingente [9], introduzem-se os instrumentos financeiros usados nesta tese como sejam opções europeias, swaps e swaptions, e convenções de mercado, e descrevem-se também o conteúdo e a proveniência dos dados utilizados no decorrer dos trabalhos realizados nesta tese.

O capítulo 2 é referente ao modelo HJM como descrito acima.

No capítulo 3 são referidos os modelos de volatilidade constante, de volatilidade local e um algoritmo importante para cálculo da volatilidade de um conjunto de derivados financeiros a partir de dados de mercado de outros derivados.

No capítulo 4 introduz-se o modelo SABR, descrevem-se vários procedimentos usados para a sua calibração e para a estimação de uma função de densidade de probabilidade de um preço futuro condicionada pelos acontecimentos passados.

Capítulo 1

Mercados Financeiros em tempo discreto

Neste capítulo descrevem-se os pressupostos de um mercado financeiro em tempo discreto, definem-se conceitos-chave como arbitragem, estrutura a prazo, taxa de juro e dívida contingente, introduzem-se os instrumentos financeiros usados nesta tese como sejam opções europeias, swaps, swaptions, e convenções de mercado [9], e descrevem-se o conteúdo e a proveniência dos dados utilizados no decorrer dos trabalhos realizados nesta tese.

1.1 Modelo geral de um mercado financeiro em tempo discreto

(H_0) Para o modelo há um único agente económico relevante e todos os outros com quem interage não estão sob influência das suas acções no mercado e vice-versa.

(H_1) A actividade financeira ocorre num intervalo temporal $[t_0, t_N]$.

Seja

$$\mathbb{T} = \left\{ t_i : i \in \bar{\mathbb{T}}, t_i \in [t_0, t_N], t_0 < t_1 < \dots < t_N \right\} \quad (1.1)$$

o conjunto finito ordenado de datas de transacções financeiras, onde $T = t_N$ se designa por *horizonte temporal*. O conjunto $\bar{\mathbb{T}} = \{0, \dots, N\}$ é o conjunto dos índices de \mathbb{T} . Considera-se, portanto, que o intervalo $[t_0, t_N]$ está dividido em N subintervalos sendo $\tau_n = t_{n+1} - t_n$, $n \in \bar{\mathbb{T}} \setminus \{N\}$ a amplitude do n -ésimo subintervalo.

Notação 1.1. A menos que algo seja mencionado noutro sentido, as datas $s, t, u \in \mathbb{T}$ estão ordenadas: $s < t < u$ e $\bar{s} \in \bar{\mathbb{T}}$ representa o s -ésimo elemento de \mathbb{T} .

Por uma questão de simplificação, para uma data $t \in \mathbb{T}$ escreve-se a data anterior a

t como $t - 1$, a menos que seja dito o contrário. O índice associado à data $t - 1$ é $\bar{t} - 1$ pertencente a $\bar{\mathbb{T}}$.

- (H_2) A incerteza das condições económico-financeiras do mercado nas várias datas de transação é modelada através de um espaço de probabilidade filtrado $(\Omega, \mathbb{F}, \mathbb{P}, \mathbb{T})$, onde \mathbb{F} é uma filtração de σ -álgebras de Ω ,

$$\mathcal{F}(0) \subset \mathcal{F}(1) \subset \dots \subset \mathcal{F}(T-1) \subset \mathcal{F}(T).$$

Supõe-se ainda que $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ é um espaço de medida completo e que $\mathcal{F}(0)$ é formado pelos conjuntos $A \in \mathcal{F}$ tais que $\mathbb{P}(A) = 0$ ou $\mathbb{P}(A) = 1$, ou seja, $A = \emptyset$ ou $A = \Omega$. Cada $\omega \in \Omega$ é um possível estado económico-financeiro no espaço temporal considerado.

A ideia da existência da filtração $\mathbb{F} = (\mathcal{F}(t))_{t \in \mathbb{T}}$ é a seguinte:

O estado económico-financeiro ω do intervalo temporal $[0, T]$ vai sendo desvendado ao longo do tempo e será completamente conhecido apenas na data final T .

Numa data t supõe-se que a informação disponível é suficiente para afirmar que ω é elemento de um conjunto $A(t)$. A hipótese é que no decorrer do processo económico-financeiro vai sendo gerada uma sucessão de conjuntos,

$$A(0) \supset A(1) \supset \dots \supset A(T-1) \supset A(T),$$

em que $A(t) \in \mathcal{F}(t)$ para todo o t .

Finalmente, a probabilidade $P(t, B)$ de $\omega \in B \in \mathcal{F}$, calculada na data t usando a informação disponível nessa data é então

$$P(t, B) := P(B|A(t)) = \frac{\mathbb{P}(B \cap A(t))}{\mathbb{P}(A(t))}.$$

- (H_3) O mercado financeiro dispõe de $d + 1$ produtos, $\{P_j\}_{j \in \mathbb{D}}$, onde $\mathbb{D} = \{0, \dots, d\}$.

- (H_4) O preço do produto financeiro P_j ($j \in \mathbb{D}$) na data t é $S^j(t)$,

$$S^j(t) : \Omega \mapsto \mathbb{R}, \omega \mapsto S(t, \omega), \quad (t \in \mathbb{T}).$$

O processo estocástico dos preços dos produtos financeiros no mercado na data t é $S = (S^0, \bar{S}) = (S(t))_{t \in \mathbb{T}}$, sendo $\bar{S} = (S^1, \dots, S^d)$.

Uma vez que se desconhece a história anterior à data t_0 , por conveniência de notação, supõe-se que $S(t') = S(0)$, $\forall t' < 0$.

Supõe-se ainda que a variável $S(t)$ é $\mathcal{F}(t)$ -mensurável, ou seja, o processo S é \mathbb{F} -adaptado.

1.1. MODELO GERAL DE UM MERCADO FINANCEIRO EM TEMPO DISCRETO 3

(H₅) O preço do produto financeiro P_0 é o processo estocástico $S^0 = (S^0(t))_{t \in \mathbb{T}}$,

$$S^0(t) : \Omega \mapsto \mathbb{R}, \quad \omega \mapsto S^0(t, \omega), \quad (t \in \mathbb{T})$$

\mathbb{F} -previsível, ou seja, $S^0(t)$ é $\mathcal{F}(t-1)$ -mensurável, para cada $t \in \mathbb{T}$. Neste caso, diz-se que P_0 é um produto sem risco no curto prazo, na medida em que o preço $S^0(t)$ é conhecido na data $t-1$ e vigora no intervalo $]t-1, t]$.

(H₆) Os restantes produtos $(P_j)_{j \in \mathbb{D} \setminus \{0\}}$ têm risco inerente ao carácter aleatório do vetor de preços $\bar{S}(t)$ na data t o qual não é à partida conhecido na data $t-1$.

O processo estocástico dos preços \bar{S} dos produtos com risco é \mathbb{F} -adaptado.

(H₇) O agente económico dispõe, na data t , de um *portfólio*, $\varphi(t) = (\varphi^j(t))_{j \in \mathbb{D}}$, onde $\varphi^j(t)$, com $j \in \mathbb{D}$, representa a quantidade do produto P_j por ele detido nessa data.

(H₈) O *valor do portfólio* é o processo estocástico $V(\varphi) = (V(t, \varphi))_{t \in \mathbb{T}}$ definido por,

$$V(t, \varphi) = \varphi(t) \cdot S(t), \quad (t \in \mathbb{T}) \tag{1.2}$$

Diz-se que $V_0 = V(0, \varphi)$ é o capital inicial do agente económico para a janela de transações a decorrer nas datas \mathbb{T} .

(H₉) O agente económico selecciona o seu portfólio $\varphi(t)$ no intervalo de tempo $[t-1, t[$ depois de conhecer o vetor de preços $S(t-1)$, e mantém a seleção pelo menos até à data t .

Considera-se que o portfólio é *autofinanciado*, isto é, verifica a seguinte condição

$$\varphi(t-1) \cdot S(t-1) = \varphi(t) \cdot S(t-1), \quad (t \in \mathbb{T}), \tag{1.3}$$

onde, por conveniência, se está a supor que $\varphi(-1) = \varphi(0)$. A condição (1.3) implica que a variação do portfólio no intervalo de tempo $]t-1, t[$ deve ser feita com todo o valor disponível na data $t-1$, $V(t-1, \varphi)$, e que não há entrada de novos fundos ou retiradas de capital.

Observação 1.2. O processo estocástico $\varphi = (\varphi(t))_{t \in \mathbb{T}}$ é \mathbb{F} -previsível porque no intervalo $[t-1, t[$ além do vetor de preços $S(t-1)$, o agente económico dispõe de toda a informação sobre o processo estocástico $(S(t^*))_{t^* < t}$, ou seja, conhece a σ -álgebra $\mathcal{F}_S(t-1) = \sigma(S(0), \dots, S(t-1))$. Como se supõe que S é \mathbb{F} -adaptado, esta σ -álgebra está contida em $\mathcal{F}(t-1)$ e a hipótese sobre φ implica que o agente económico tem conhecimento de toda a σ -álgebra $\mathcal{F}(t-1)$. Por outras palavras, o portfólio $\varphi(t)$ adquirido no intervalo $[t-1, t[$ é $\mathcal{F}(t-1)$ -mensurável. Na data t conhecer-se-á o vetor de preços $S(t)$, que é por sua vez $\mathcal{F}(t)$ -mensurável.

(H_{10}) O mercado não tem fricção, isto é, supõe-se que não há custos de transação, são possíveis compras e vendas a descoberto e pedidos de empréstimo sem limite e, os produtos financeiros são infinitamente divisíveis, ou seja, $\varphi(t)$ pode ser qualquer vetor de \mathbb{R}^{d+1} , para cada $t \in \mathbb{T}$.

(H_{11}) O processo dos preços S é não negativo.

(H_{12}) O processo S^0 do preço do produto sem risco é sempre positivo e $S^0(0) = 1$.

Definição 1.3. Uma *função de desconto* é uma função

$$\nu : \mathbb{T} \times \mathbb{T} \mapsto \mathbb{R}, \quad (s, t) \mapsto \nu(s, t),$$

tal que quaisquer que sejam $s, t, u \in \mathbb{T}$:

$$\text{i) } \nu(s, t) > 0, \quad \text{ii) } \nu(s, s) = 1, \quad \text{iii) } \nu(s, t)\nu(t, u) = \nu(s, u).$$

Definição 1.4. Um *numerário* é um processo estocástico \mathbb{F} -previsível, $X = (X(t))_{t \in \mathbb{T}}$ que toma valores em \mathbb{R} e que é sempre positivo, isto é

$$X(t, \omega) > 0, \quad \forall t \in \mathbb{T}, \quad \forall \omega \in \Omega. \quad (1.4)$$

Pela hipótese H_{12} o processo do preço do produto sem risco S^0 é um numerário. Se nada for dito em contrário a partir de agora considera-se que S^0 é o numerário.

Definição 1.5. O processo estocástico dos *preços descontados* associados ao numerário X é $\tilde{S} = (\tilde{S}(t))_{t \in \mathbb{T}}$, onde

$$\tilde{S}(t) = \frac{S(t)}{X(t)}. \quad (1.5)$$

Definição 1.6. O processo dos *valores descontados* associados ao numerário X é $\tilde{V}(\varphi) = (\tilde{V}(t, \varphi))_{t \in \mathbb{T}}$, onde

$$\tilde{V}(t, \varphi) = \frac{V(t, \varphi)}{X(t)} = \varphi(t) \cdot \tilde{S}(t). \quad (1.6)$$

Definição 1.7. Seja Ψ o conjunto dos portfólios autofinanciados. Diz-se que um portfólio autofinanciado $\varphi \in \Psi$ é *admissível* se o processo do valor do portfólio é não negativo, ou seja, $V(t, \varphi) \geq 0$, com $t \in \mathbb{T}$.

A restrição aos portfólios autofinanciados admissíveis tem a seguinte consequência económico-financeira: apesar de serem possíveis transações a descoberto, ou seja, $\varphi^j(t) < 0$, para algum $j \in \mathbb{D}$, elas só serão agora admitidas se o valor total do portfólio em cada data for não negativo, isto é, se houver uma compensação suficiente, em valor, pelos outros produtos detidos no portfólio para que o seu valor não seja negativo.

Definição 1.8. Uma *dívida contingente* com maturidade (ou data de exercício) $t \in \mathbb{T}$ é uma função $\mathcal{F}(t)$ -mensurável

$$H : \Omega \mapsto \mathbb{R}_0^+, \quad \omega \mapsto H(\omega),$$

tal que $\mathbb{P}(H > 0) > 0$.

A dívida contingente diz-se *replicável* (ou liquidável) na sua data de maturidade, se existir um portfólio φ autofinanciado tal que $V(t, \varphi) = H$. Nesse caso diz-se que o portfólio φ replica a dívida contingente H .

Definição 1.9. Na data $s \in \mathbb{T}$ diz-se que a dívida contingente H com maturidade na data $t \in \mathbb{T}$, com $t > s$, é um *derivado financeiro* do processo de preços S , se H é uma função $\mathcal{F}(t)$ -mensurável, ou seja,

$$H = F(\bar{S}(s), \dots, \bar{S}(t)), \quad (1.7)$$

onde $F : \mathbb{R}_+^{d(\bar{t}-\bar{s}+1)} \mapsto \mathbb{R}$ é uma função *Borel*-mensurável.

1.1.1 Taxas de rentabilidade

Definição 1.10. A *taxa de rentabilidade* do preço do produto P_i entre as datas $t-1$ e t é

$$R_i(t) = \begin{cases} \frac{S^i(t) - S^i(t-1)}{S^i(t-1)}, & \text{se } S^i(t-1) > 0; \\ 0, & \text{se } S^i(t-1) = 0. \end{cases} \quad (\forall t \in \mathbb{T});$$

Seja $R = (R_0, \dots, R_d)$. Então $R(0) = 0$.

No caso do produto P_0 ser uma conta bancária

$$R_0(t) = \frac{S^0(t) - S^0(t-1)}{S^0(t-1)}$$

é a taxa de juro aplicada ao valor depositado na data $t-1$. Supõe-se que $R_0(t)$ é $\mathcal{F}(t-1)$ -mensurável.

O preço do produto financeiro P_0 na data t é portanto

$$X(t) = S^0(t) = (1 + R_0(t)) X(t-1) \quad e \quad \frac{R_0(t)}{X(t)} = \frac{1}{X(t-1)} - \frac{1}{X(t)}. \quad (1.8)$$

Supõe-se também que $X(0) = 1$.

1.2 Arbitragem

Definição 1.11. Uma *oportunidade de arbitragem* é um portfólio autofinanciado φ com valor inicial não positivo, com valor final não negativo e com probabilidade positiva de ter valor positivo na data $t \in \mathbb{T}$, ou seja, φ é um portfólio tal que

$$\text{i) } V(0, \varphi) \leq 0; \quad \text{ii) } V(t, \varphi) \geq 0; \quad \text{iii) } \mathbb{P}(V(t, \varphi) > 0) > 0, \quad (\forall t \in \mathbb{T}).$$

Uma oportunidade de arbitragem trata-se, portanto, da possibilidade de se obter no final do processo económico um valor total positivo com investimento inicial negativo ou nulo.

A oportunidade de arbitragem diz-se fraca se na condição (i) se tiver uma igualdade. Mostra-se que com as hipóteses H_1, \dots, H_{12} a existência de uma oportunidade de arbitragem é equivalente à existência de uma oportunidade de arbitragem fraca.

Definição 1.12. O modelo de mercado financeiro $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \mathbb{T}, \mathbb{F}, S)$ é chamado um modelo de mercado financeiro *completo* se for livre de arbitragem e se toda a dívida contingente H de uma opção europeia com maturidade na data T é liquidável na data T . Se isso não acontecer diz-se que o modelo de mercado financeiro é *incompleto*.

1.3 Teoremas fundamentais sobre os preços num mercado financeiro

Definição 1.13. Uma distribuição de probabilidade \mathbb{Q} em (Ω, \mathcal{F}) é uma *medida martingala*, também designada por medida neutral ao risco, para o processo de preços descontados \tilde{S} se \tilde{S} é uma \mathbb{Q} -martingala, isto é,

$$(i) \tilde{S}(t) \text{ é } \mathbb{Q}\text{-integrável}; \quad (ii) E_{\mathbb{Q}}(\tilde{S}(t) | \mathcal{F}(t-1)) = \tilde{S}(t-1), \quad (\forall t \in \mathbb{T}).$$

Nota 1.14. Um processo estocástico S diz-se *integrável* relativamente a uma medida martingala \mathbb{Q} se verificar $E_{\mathbb{Q}}(|S|) < \infty$.

Nota 1.15. Seja Y um processo estocástico usar-se-á notação para $E_{\mathbb{Q}(s)}(Y) = E_{\mathbb{Q}}(Y | \mathcal{F}(s))$.

Diz-se que uma medida martingala \mathbb{Q} para \tilde{S} é uma medida martingala \mathbb{P} -equivalente para \tilde{S} se \mathbb{P} e \mathbb{Q} têm os mesmos conjuntos de medida nula, isto é, se são medidas de probabilidade equivalentes.

Proposição 1.16. Seja \mathbb{Q} uma distribuição de probabilidade em (Ω, \mathcal{F}) . As seguintes condições são equivalentes,

1. \tilde{S} é uma \mathbb{Q} -martingala.
2. Se φ é um portfólio autofinanciado e limitado, o processo do valor do portfólio, $\tilde{V}(t, \varphi)$ é uma \mathbb{Q} -martingala.
3. Se φ é um portfólio autofinanciado e limitado e $E_{\mathbb{Q}}(\tilde{V}(t, \varphi)) = \tilde{V}(t-1, \varphi)$, para todo $t \in \mathbb{T}$, então o processo do valor do portfólio $(E_{\mathbb{Q}}(\tilde{V}(t, \varphi)))_{t \in \mathbb{T}}$ é uma \mathbb{Q} -martingala.

Nesse caso,

$$E_{\mathbb{Q}}(\tilde{V}(T, \varphi) | \mathcal{F}(t)) = \tilde{V}(t, \varphi)$$

Teorema 1.17. (Primeiro teorema fundamental dos preços dos produtos financeiros)

Seja \mathbb{Q} uma medida martingala \mathbb{P} -equivalente para \tilde{S} . Sejam H uma dívida contingente pagável na data de maturidade T e φ um portfólio admissível que replica a dívida H . Então

$$\tilde{V}(t, \varphi) = E_{\mathbb{Q}}\left(\frac{1}{X(T)}H\right) \quad (\forall t \in \mathbb{T}). \quad (1.9)$$

Portanto $\tilde{V}(t, \varphi) \geq 0$, \mathbb{Q} -a.e.

Teorema 1.18. (Segundo teorema fundamental dos preços dos produtos financeiros)

As seguintes condições são equivalentes,

1. O mercado é livre de arbitragem.
2. Existe uma medida martingala \mathbb{Q} para o processo dos preços descontados \tilde{S} que é \mathbb{P} -equivalente.

Se qualquer destas condições se verificar, existe $\lambda : \Omega \mapsto \mathbb{R}^+$, $\omega \mapsto \lambda(\omega)$ tal que, notando também por λ a função

$$\lambda : \mathbb{R}^{\Omega} \mapsto \mathbb{R}, X \mapsto \lambda(X) = \int_{\Omega} X d\lambda = \sum_{\omega \in \Omega} \lambda(\omega) X(\omega), \quad (1.10)$$

tem-se:

$$(i) \lambda \text{ e } \mathbb{Q} \text{ medidas } \mathbb{P} \text{-equivalentes}; \quad (ii) \frac{d\mathbb{Q}}{d\lambda}(\omega) =: \frac{S^0(T, \omega)}{\lambda(S^0(T))}; \quad (iii) \frac{d\mathbb{Q}}{d\lambda}(\omega) = \frac{1/S^0(T)}{E_{\mathbb{Q}}(1/S^0(T))}.$$

Diz-se que $\lambda : \mathbb{R}^{\Omega} \mapsto \mathbb{R}$ é uma T -medida (positiva) a prazo¹ para o mercado financeiro.

Teorema 1.19. (Terceiro teorema fundamental dos preços dos produtos financeiros)

Seja $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \mathbb{T}, \mathbb{F}, S)$ um modelo de mercado financeiro e suponha-se que $\mathcal{F}(0) = \{\emptyset, \Omega\}$.

As seguintes condições são equivalentes:

1. O mercado financeiro é completo;
2. Existe uma única medida martingala \mathbb{Q} para \tilde{S} que é \mathbb{P} -equivalente.

¹ T -forward measure.

1.3.1 Preço de um derivado financeiro

Sejam $\omega(t) \in \Omega(t)$ uma sucessão de eventos económico-financeiros (*história elementar*) desde a data t_0 até à data t , com $t \geq t_0$, e $\Omega(t)$ o conjunto de todas as histórias elementares desde a data t_0 até à data t . O conjunto $\bar{\Omega}(t)$ é o conjunto dos eventos económico-financeiros possíveis na data t e $\omega(t)$ nota a realização de um desses eventos na data t . A cardinalidade de $\bar{\Omega}(t)$ é $M(t)$. Se $\bar{\Omega}(t)$ não for finito escreve-se $M(t) = \infty$.

Suponha-se que o mercado é livre de arbitragem e que \mathbb{Q} é uma medida martingala para \tilde{S} equivalente a \mathbb{P} . Seja H um derivado financeiro com dívida contingente

$$F(\bar{S}) = F(\bar{S}(0), \dots, \bar{S}(t))$$

onde $F : \mathbb{R}_+^{d(t+1)} \mapsto \mathbb{R}$ é uma função tal que $F \circ (\bar{S}(0), \dots, \bar{S}(t))$ é \mathbb{Q} -integrável. Seja ν a função de desconto associada ao numerário X dada por $\nu(t, z) = \frac{X(t)}{X(z)}$ para datas t, z arbitrárias com $t \leq z$. Relembrando a definição 1.10 tem-se,

(a) dados $\bar{\omega}(t-1) \in \bar{\Omega}(t-1)$ e $\bar{\omega}(z-1) \in \bar{\Omega}(z-1)$,

$$\nu(t, z, \bar{\omega}(z-1)) = \frac{\nu(z, \bar{\omega}(z-1))}{\nu(t, \bar{\omega}(t-1))} = \frac{S^0(t, \bar{\omega}(t-1))}{S^0(z, \bar{\omega}(z-1))} = \frac{1}{\prod_{u=t+1}^z (1 + R_0(u, \bar{\omega}(u-1)))}.$$

(b) o processo de preços de H , $\pi_{\mathbb{Q}}(t, H) = E_{\mathbb{Q}}(\nu(t, z)F(\bar{S})|\mathcal{F}(t))$, relativamente à medida \mathbb{Q} é a variável aleatória $\mathcal{F}(t)$ -mensurável determinada pelo vetor

$$\left(\pi_{\mathbb{Q}}(t, H; \bar{\omega}(t, m)) = E_{\mathbb{Q}}(\nu(t, z)F(\bar{S})|\mathcal{F}) \right)_{1 \leq m \leq M(t)}, \quad (1.11)$$

onde $\mathbb{M}(t)$ é o conjunto de acontecimentos possíveis na data t .

Notação 1.20. Notam-se as seguintes matrizes $\bar{R}(t) = \text{diag}(R_1(t), \dots, R_d(t))$ e $\hat{R}(t) = I + \bar{R}$. Sejam $1 \leq t \leq u \leq T$ tem-se o seguinte $\hat{R}(t, u) = \hat{R}(u)\hat{R}(u-1) \cdots \hat{R}(t)$.

Nota 1.21. No caso particular em que se considera que $\bar{\Omega}(t)$ é finito, o preço de H na

data t condicionado por $\bar{\omega}(t, m) \in \bar{\Omega}(t)$ é dado por

$$\begin{aligned}
\pi_{\mathbb{Q}}(t, H; \bar{\omega}(t, m)) &= E_{\mathbb{Q}} \left(\nu(t, z) F(\bar{S} | \bar{\omega}(t, m)) \right) \\
&= E_{\mathbb{Q}} \left(\nu(t, z) F(\bar{S}(0), \dots, \bar{S}(t), \hat{R}(t+1, t+1) \bar{S}(t), \dots, \hat{R}(t+1, z) \bar{S}(t) | \bar{\omega}(t, m)) \right) \\
&= \sum_{\bar{\omega}(z) \in \bar{\Omega}(z) : \bar{\omega}(t) = \bar{\omega}(t, m)} P_{\mathbb{Q}}(\bar{\omega}(z) | \bar{\omega}(t, m)) \nu(t, z, \bar{\omega}(z-1)) \cdot \\
&\quad \cdot \left(F(\bar{S}(0), \bar{S}(1, \bar{\omega}(1)), \dots, \bar{S}(t, \bar{\omega}(t)), \hat{R}(t+1, t+1) \bar{S}(t, \bar{\omega}(t)), \dots, \hat{R}(t+1, z) \bar{S}(t, \bar{\omega}(t))) \right) \\
&= \sum_{\bar{\omega}(z) \in \bar{\Omega}(z) : \bar{\omega}(t) = \bar{\omega}(t, m)} \frac{P_{\mathbb{Q}}(\bar{\omega}(z))}{P_{\mathbb{Q}}(\bar{\omega}(t))} \nu(t, z, \bar{\omega}(z-1)) \cdot \\
&\quad \cdot \left(F(\bar{S}(0), \bar{S}(1, \bar{\omega}(1)), \dots, \bar{S}(t, \bar{\omega}(t)), \hat{R}(t+1, t+1) \bar{S}(t, \bar{\omega}(t)), \dots, \hat{R}(t+1, z) \bar{S}(t, \bar{\omega}(t))) \right) \\
&= \sum_{\bar{\omega}(z) \in \bar{\Omega}(z) : \bar{\omega}(t) = \bar{\omega}(t, m)} \prod_{u=t+1}^z q(u, \bar{\omega}(u)) \nu(t, z, \bar{\omega}(z-1)) \cdot \\
&\quad \cdot \left(F(\bar{S}(0), \bar{S}(1, \bar{\omega}(1)), \dots, \bar{S}(t, \bar{\omega}(t)), \hat{R}(t+1, t+1) \bar{S}(t, \bar{\omega}(t)), \dots, \hat{R}(t+1, z) \bar{S}(t, \bar{\omega}(t))) \right),
\end{aligned}$$

onde,

$$\hat{R}(t+1, t+k, \bar{\omega}(t+k)) = \hat{R}(t+k, \bar{\omega}(t+k)) \cdots \hat{R}(t+1, \bar{\omega}(t+1)).$$

Em particular, o preço livre de arbitragem de H relativamente à medida martingala \mathbb{Q} é

$$\begin{aligned}
\pi_{\mathbb{Q}}(0, H) &= \sum_{\bar{\omega}(z) \in \bar{\Omega}(z)} \prod_{u=s}^z q(u, \bar{\omega}(u)) \nu(t, z, \bar{\omega}(z-1)) \cdot \\
&\quad \left(F(\bar{S}(0), \hat{R}(1, 1, \bar{\omega}(1)) \bar{S}(0), \dots, \hat{R}(1, z, \bar{\omega}(z)) \bar{S}(0)) \right)
\end{aligned}$$

Nota 1.22. Muitos derivados financeiros têm pagamentos que dependem das taxas de juro de mercado observadas numa data t anterior à data de maturidade u da dívida contingente. Essa data t em que se verifica a mudança de taxa de juro é chamada data de reajuste² da taxa de juro.

Diz-se neste caso que os pagamentos são postecipados.

Seja s a data de avaliação da dívida, u a data de maturidade e t a data de reajuste da taxa de juro, $s < t < u$. Então o valor na data s da dívida contingente $H(t, u)$ na data u é, pela propriedade da torre da esperança condicional,

$$\begin{aligned}
\pi(s, H(t, u), \nu(s, -)) &= E(\nu(s, u) H(t, u) | \mathcal{F}(s)) \\
&= E(E(\nu(s, u) H(t, u) | \mathcal{F}(t)) | \mathcal{F}(s)) \\
&= E(\nu(s, t) H(t, u) E(\nu(t, u) | \mathcal{F}(t)) | \mathcal{F}(s)) \\
&= E(\nu(s, t) H(t, u) \nu(t, u) | \mathcal{F}(s)).
\end{aligned}$$

²reset date

Portanto o valor descontado na data s da dívida contingente $H(t, u)$ pagável na data u é igual ao valor descontado na data s da dívida $\nu(t, u)H(t, u)$ pagável na data t . Isto é equivalente a que a dívida $H(t, u)$ pagável na data u seja substituída pela dívida $\nu(t, u)H(t, u)$ pagável na data t .

1.3.2 Opções europeias

Definição 1.23. Uma *opção europeia* contratada na data s e com data de exercício t é uma dívida contingente $\mathcal{F}(t)$ –mensurável. A diferença $t - s$ é a maturidade residual da opção europeia, também designada por *expiry*.

As opções europeias podem ser de compra ou de venda.

Na data s o investidor realiza o seguinte contrato:

Na data $t > s$, depois de conhecer o vetor de preços $S(t)$, o investidor tem o direito mas não o dever de comprar um produto P_j , $j \in \mathbb{D}$, por um preço de exercício y , fixado na data s , portanto,

- No caso em que a opção é de compra:
 - se $S^j(t) > y$, o investidor tem o direito de comprar o produto P_j à contraparte pelo preço y gerando um ganho bruto unitário igual a $(S^j(t) - y)$;
 - se $S^j(t) \leq y$, o investidor não exerce o direito de comprar o produto P_j à contraparte já que o pode comprar por um preço inferior a y ;
- No caso em que a opção é de venda:
 - se $S^j(t) < y$, o investidor não exerce o direito de venda já que o pode vender o produto P_j por um preço superior a y .
 - se $S^j(t) \geq y$, o investidor tem o direito de vender o produto P_j à contraparte pelo preço y gerando um ganho bruto unitário igual a $(y - S^j(t))$.

Fazendo

$$\kappa = \begin{cases} 1, & \text{se a opção europeia for de compra;} \\ -1, & \text{se a opção europeia for de venda;} \end{cases}$$

a dívida contingente por unidade de portfólio φ^j é

$$H_E(\kappa) = \max(0, \kappa(S^j(t) - y)) = (\kappa(S^j(t) - y))^+.$$

O preço unitário livre de arbitragem da opção europeia é neste caso,

$$\pi(s, H_E^\kappa) = V(s, \varphi^j),$$

onde φ é uma estratégia de negócio admissível tal que $V(t, \varphi) = H_E(\kappa)$.

Em particular,

$$\pi_{\mathbb{Q}}(s, H_E(\kappa)) = X(s) \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left(\frac{1}{X(t)} H_E(\kappa) | \mathcal{F}(s) \right) = \nu(s, t) (\kappa (S^j(t) - y))^+, \quad (1.12)$$

em que $\nu(s, t)$ é o factor de desconto estocástico para o intervalo de tempo $]s, t]$, associado ao numerário X .

Proposição 1.24. (Paridade entre preço de venda e preço de compra de uma opção europeia) Considere-se um mercado financeiro livre de arbitragem com um único produto com risco cujo preço é S^1 e um único produto sem risco com preço determinístico S^0 . Sejam $\pi(s, t, y, \kappa = 1)$ e $\pi(s, t, y, \kappa = -1)$, respectivamente, o preço de uma opção europeia de compra e o preço de uma opção europeia de venda na data s , com maturidade na data t e ambas com preço de exercício y . Então,

$$\pi(s, t, y, \kappa = 1) - \pi(s, t, y, \kappa = -1) = S^1(s) - y \frac{S^0(s)}{S^0(t)}.$$

Seja $p(S, t)$ a função densidade de probabilidade do preço $S(t)$ do ativo subjacente na data t .

O preço $\pi(s, H_E(\kappa = 1))$ de uma opção europeia de compra na data s escreve-se

$$\pi(s, t, S(t), y, \kappa = 1) = \nu(s, t) E_{\mathbb{Q}(s)} \left((S(t) - y)^+ \right) \quad (1.13)$$

$$= \nu(s, t) \int_y^{+\infty} (S(t) - y) p(S, t) dS \quad (1.14)$$

Usando (1.14) a primeira e segunda derivadas de π em ordem a y são

$$\frac{\partial \pi}{\partial y}(s, t, S(t), y, \kappa = 1) = -\nu(s, t) \int_y^{\infty} p(S, t) dS \quad (1.15)$$

$$\frac{\partial^2 \pi}{\partial y^2}(s, t, S(t), y, \kappa = 1) = \nu(s, t) p(S, t). \quad (1.16)$$

Obtém-se assim a expressão da função densidade de probabilidade de $S(t)$ condicionada pela σ -álgebra $\mathcal{F}(s)$:

$$p(S, t) = \frac{1}{\nu(s, t)} \frac{\partial^2 \pi}{\partial y^2}(s, t, S(t), y, \kappa = 1). \quad (1.17)$$

Esta expressão conhecida por fórmula de *Breeden e Litzenberger*[6] também é válida para $\kappa = -1$, pelo que se omite κ dos seus argumentos.

1.4 Estrutura a prazo das taxas de juro

Definição 1.25. Uma *obrigação com zero cupões e sem risco, ZCB*, é um contrato financeiro celebrado numa data $s \in \mathbb{T}$ entre dois agentes económicos, A e B , em que o vendedor

do contrato, B , se compromete a pagar o montante fixo 1 u.m. (unidade monetária), na data $t \in \mathbb{T}$ por cada obrigação que o comprador, A , adquirir na data s pelo preço unitário $B(s, t)$.

Denota-se por (s, t) -ZCB a obrigação com zero cupões com início na data s e maturidade na data t , e por $z = t - s$ a maturidade residual.

Definição 1.26. Considere-se uma (s, t) -ZCB cujo preço na data s é $B(s, t)$. O *cashflow* gerado pelo portfólio φ que contém unicamente a ZCB referida é

$$((s, \varphi(s)), (t, \varphi(t))) = ((s, -B(s, t)), (t, 1)).$$

Definição 1.27. A *taxa de juro à vista* da (s, t) -ZCB, $y(s, t)$, é a *taxa interna de rentabilidade* do seu *cashflow*, ou seja

$$y(s, t) = B(s, t)^{-\frac{1}{t-s}} - 1.$$

A *intensidade da taxa de juro à vista* para a compra da (s, t) -ZCB é

$$Y(s, t) = \log(1 + y(s, t)) = -\frac{1}{t-s} \log(B(s, t)).$$

A seguinte relação é válida,

$$V(s, \varphi) = B(s, t) = (1 + y(s, t))^{-(t-s)} = \exp(-(t-s)Y(s, t)).$$

Prova-se que num mercado livre de arbitragem a função preço de uma ZCB é uma função de desconto.

Seja $r(s, t)$ a taxa de juro que um banco usa para onerar empréstimos ou remunerar depósitos no intervalo $]s, t]$ e seja $B(s, t)$ o preço de uma (s, t) -ZCB, admitindo que o mercado financeiro que tem como produtos as ZCB e as contas bancárias a prazo é livre de arbitragem então,

$$B(s, t) = \frac{1}{1 + r(s, t)}.$$

Em particular,

$$B(t, u) = \frac{B(s, u)}{B(s, t)}, \quad s < t < u. \quad (1.18)$$

Seja $f(s, t, u)$ a taxa de juro contratada na data s para a aquisição de um produto financeiro, P , na data t e válido até à data de maturidade u . Supondo que o mercado é livre de arbitragem prova-se que é indiferente investir em ZCB ou no produto P se e só se

$$B(t, u) = \frac{B(s, u)}{B(s, t)} = (1 + f(s, t, u))^{-(u-t)}.$$

Definição 1.28. Diz-se que $f(s, t, u)$ é a *taxa de juro a prazo* na data s para um investimento a realizar na data t e término na data u .

A intensidade da taxa de juro associada a $f(s, t, u)$ é

$$Y(s, t, u) = \log(1 + f(s, t, u)).$$

Portanto,

$$(1 + f(s, t, u))^{u-t} = \exp((u-t)Y(s, t, u)) = \frac{B(s, t)}{B(s, u)}.$$

Logo,

$$Y(s, t, u) = -\frac{1}{u-t}(\log(B(s, u)) - \log(B(s, t))) \quad (1.19)$$

$$= Y(s, u) + (t-s)\frac{Y(s, u) - Y(s, t)}{u-t}. \quad (1.20)$$

Em particular, $Y(s, t) = Y(s, s, t)$.

Definição 1.29. Suponha-se que a função $B(s, -)$ é derivável para todo o $s \in \mathbb{R}_+^*$. Por ser uma função de desconto existe uma única função $t \mapsto f(s, t)$ tal que

$$B(s, t) = \exp\left(-\int_s^t f(s, u)du\right).$$

Diz-se que $f(s, t)$ é a *taxa de juro instantânea a prazo* na data s para a maturidade t . Tem-se então,

$$f(s, t) = \frac{\partial}{\partial t} \log(B(s, t)) = \frac{\partial}{\partial t}(t-s)Y(s, t).$$

Portanto,

$$Y(s, t) = \frac{1}{t-s} \int_s^t f(s, \theta) d\theta \quad (1.21)$$

$$f(s, t) = Y(s, t) + (t-s)\frac{\partial Y(s, t)}{\partial t}.$$

Por outro lado, tem-se também,

$$\begin{aligned} f(s, t) &= \frac{\partial}{\partial t} \log(B(s, t)) \\ &= -\lim_{T \rightarrow t^+} \frac{1}{T-t} (\log(B(s, T)) - \log(B(s, t))) \\ &= \lim_{T \rightarrow t^+} Y(s, t, T) \approx Y(s, t, t+\epsilon), \end{aligned}$$

onde ϵ é um prazo considerado infinitesimal. Ou seja, $f(s, t)$ é a *taxa de juro composta a prazo* contratada na data s , para um empréstimo a vigorar entre a data t e a data $t+\epsilon$, onde ϵ é um prazo infinitesimal (tipicamente um dia)³.

³ *overnight compounded forward rate.*

Usando as igualdades (1.20) e (1.21) resulta a relação

$$Y(s, t, u) = \frac{1}{u - t} \int_t^u f(s, \theta) d\theta$$

que evidencia que a intensidade da taxa de juro a prazo $Y(s, t, u)$ é uma média ponderada de taxas de juro instantâneas.

Pode-se encarar a taxa de juro instantânea como o acréscimo da rentabilidade logaritmiçada $\rho(s, t, u) = (u - t)Y(s, t, u)$ associado a um acréscimo marginal do prazo do investimento,

$$f(s, t) = \frac{\partial \rho(s, t, u)}{\partial u}.$$

Definição 1.30. A taxa de juro instantânea de curto prazo⁴ na data s associada à ZCB é

$$r(s) = f(s, s). \quad (1.22)$$

Trata-se da taxa na data s para operações financeiras no período $]s, s + \epsilon]$ onde $\epsilon > 0$ representa um prazo infinitesimal.⁵

Definição 1.31. A taxa de juro simples associada à taxa de juro $r(s, t)$ é

$$F(s, t) = \frac{1}{t - s} r(s, t) = \frac{1}{t - s} \left(\frac{1}{B(s, t)} - 1 \right)$$

Definição 1.32. A taxa de juro simples a prazo na data s para o intervalo $]t, u]$ é

$$F(s, t, u) = \frac{1}{u - t} \left(\frac{B(s, t)}{B(s, u)} - 1 \right). \quad (1.23)$$

Portanto $F(s, u) = F(s, s, u)$, e

$$F(s, t, u) = \frac{1}{u - t} \frac{(u - s)F(s, u) - (t - s)F(s, t)}{1 + (t - s)F(s, t)}. \quad (1.24)$$

Notação 1.33. Nota-se a taxa de juro simples a prazo também por $F_n(s) = F(s, t_{n-1}, t_n)$, $s < t_{n-1} < t_n$, quando for adequado.

Nota 1.34. Na prática, num mercado financeiro com grande liquidez para um *contrato a prazo*⁶ ou para um *contrato de futuros*⁷ pode-se usar como numerário a curva dos preços $B(s, t)$ das ZCB emitidas na data inicial s .

⁴overnight rate.

⁵entre algumas horas a um dia.

⁶forward contract.

⁷futures contract.

1.4.1 Exemplos de taxas de juro de mercado

As taxas de juro interbancárias são taxas de juro que os bancos usam para emprestar dinheiro entre si e que são revistas diariamente.

Tratam-se de taxas de referência para estabelecer o preço e taxas de juro base de vários produtos financeiros, nomeadamente: taxas de juro de empréstimo ou depósito, opções sobre taxas de juro swaps de taxas de juro ou opções sobre swaps de taxas de juro.

Taxa *LIBOR*

Uma das taxas de juro mais utilizadas para esse efeito é a *taxa LIBOR*⁸ com várias maturidades. Atualmente, há taxas LIBOR para 7 maturidades (diária, 1 semana, 1 mês, 2 meses, 3 meses, 6 meses e 12 meses). Estas taxas são calculadas pelo *ICE*⁹ usando os valores médios das taxas de juro praticadas por um painel de bancos que operam no mercado financeiro de Londres para fazerem empréstimos de fundos entre si.

As taxas LIBOR são ainda calculadas para 5 moedas diferentes (dólar americano (USD), euro (EUR), libra esterlina (GBP), yen japonês (JPY) e franco suíço (CHF)). Nota-se por $LIBOR(s, t)$ a taxa LIBOR na data s para o período $]s, t]$, sendo $F_{LIBOR}(s, t, u)$ a taxa de juro simples a prazo, dada por uma fórmula semelhante a (1.24),

$$F_{LIBOR}(s, t, u) = \frac{1}{u - t} \frac{(u - s)LIBOR(s, u) - (t - s)LIBOR(s, t)}{1 + (t - s)LIBOR(s, t)}. \quad (1.25)$$

Taxa *EURIBOR*

Outra das taxas de juro mais utilizadas é a taxa *EURIBOR*¹⁰ com várias maturidades. Atualmente, há taxas EURIBOR para 5 maturidades (diária, 1 mês, 3 meses, 6 meses e 12 meses). Estas taxas são calculadas usando os valores médios das taxas de juro que um painel de bancos que operam no mercado monetário de europeu praticam para fazerem empréstimos de fundos entre si sem garantia.

Nota-se por $EURIBOR(s, t)$ a taxa EURIBOR na data s para o período $]s, t]$, sendo $F_{EURIBOR}(s, t, u)$ a taxa de juro simples a prazo dada por uma fórmula semelhante a (1.24),

$$F_{EURIBOR}(s, t, u) = \frac{1}{u - t} \frac{(u - s)EURIBOR(s, u) - (t - s)EURIBOR(s, t)}{1 + (t - s)EURIBOR(s, t)}. \quad (1.26)$$

⁸London Interbank Offered Rate.

⁹Interbank Exchange.

¹⁰Euro Interbank Offered Rate.

1.5 *Swaps* ou permutas de *cashflows*

Um contrato de *swap* é um contrato financeiro entre dois agentes económicos X e Y para permuta dos seus *cashflows*. As duas partes do contrato são chamadas *legs* do contrato de swap.

Os *cashflows* que são trocados podem estar na mesma moeda (*single currency swap*) ou em moedas diferentes (*cross currency swap*).

Qualquer uma das partes pode ter um cashflow constante ou variável.

O tipo mais comum de swap é o que permuta uma taxa de juro fixa por uma taxa de juro variável. Neste contrato a primeira contraparte (*fixed leg*) compromete-se a fazer pagamentos a taxa de juro fixa à segunda contraparte. Por sua vez, a segunda contraparte (*floating leg*) compromete-se a fazer pagamentos a taxa de juro variável à primeira contraparte. A taxa de juro fixa é chamada a *taxa de juro de swap*. Os pagamentos são calculados com base no valor nocional atribuído a activos detidos por cada uma das partes. Quando o valor nocional é uma soma monetária chama-se *nocional principal*. Geralmente, nos swaps em moeda doméstica os nocionais principais não são permutados. Já no caso dos swaps em moeda estrangeira costuma haver troca.

Um swap de taxas de juro¹¹ *IRS* é um contrato privado¹² entre dois agentes económicos X e Y para troca de cashflows correspondentes aos juros devidos por um nocional - permutado entre si as respetivas taxas de juro (sejam fixas ou variáveis). As taxas de juro variáveis estão normalmente indexadas às taxas de juro a prazo LIBOR ou EURIBOR.

Um *swap* de taxas de juro na mesma moeda tem algumas definições e terminologias características.

Considerem-se os seguintes dados:

- Uma data s_0 na qual se conhece uma curva de desconto para as datas futuras¹³ $t > s$, $\nu(s, t) = \frac{1}{1+r(s,t)}$ associada a taxas de juro $r(s, t)$ e que será usada para a atualização do cashflow de juros pagos por X e por Y. Dois exemplos comuns:
 - a função-preço das (s, t) -ZCB $\nu(s, t) = B(s, t)$;
 - a função preço induzida por $(F(s, t))_{s \leq t}$, uma curva de rentabilidade de taxas de juro simples a prazo $\nu(s, t) = \frac{1}{1+(t-s)F(s,t)}$.
- Uma data $s \geq s_0$, chamada *data de realização*¹⁴ do contrato.

¹¹ *interest rate swap*.

¹² *over the counter, OTC*.

¹³ *zero date*.

¹⁴ *settlement date*.

- Uma data $t_0 \geq s$ chamada *data de entrada em vigor*¹⁵ do contrato. A diferença (em dias) $t_0 - s$ é o *spot lag* do contrato.
- Uma data u chamada *data de maturidade*¹⁶ do contrato. A diferença $u - t_0$ é a maturidade residual do contrato, também designada por *tenor*.
- Um conjunto finito de datas

$$s = t_{X,0} < t_{X,1} \cdots < t_{X,N_X-1} < t_{X,N_X} = u, \quad t_{X,i} \in \mathbb{T}, \quad \forall i < N_X$$

sendo $t_{X,m-1}$ a *data de entrada em vigor* da m -ésima etapa do contrato de X.

- Um conjunto finito de datas

$$s = t_{Y,0} < t_{Y,1} \cdots < t_{Y,N_Y-1} < t_{Y,N_Y} = u, \quad t_{Y,i} \in \mathbb{T}, \quad \forall i < N_Y$$

sendo $t_{Y,n-1}$ a data de entrada em vigor da n -ésima etapa do contrato de Y.

- Uma taxa de juro simples $\rho_{X,m}$, para cada m .
- Um capital nocional, $K_{X,m}$ sobre o qual X paga a taxa de juro $\rho_{X,m}$ no intervalo de tempo $[t_{X,m-1}, t_{X,m}]$.
- Uma taxa de juro simples $\rho_{Y,n}$, para cada n .
- Um capital nocional, $K_{Y,n}$ sobre o qual Y paga a taxa de juro $\rho_{Y,n}$, no intervalo de tempo $[t_{Y,n-1}, t_{Y,n}]$.
- Um método de contagem do número de dias $\alpha_X(t, t')$ entre as duas datas t e t' para o cálculo dos juros do cashflow de X.
- Um método de contagem do número de dias $\alpha_Y(t, t')$ entre as duas datas t e t' para o cálculo dos juros do cashflow de Y.

O contrato de swap entre X e Y consiste no seguinte:

- Na data $t_{Y,n}$ com $n \geq 1$, X paga a Y os juros correspondentes ao capital nocional $K_{Y,n}$,

$$\alpha_Y(t_{Y,n-1}, t_{Y,n}) \rho_{Y,n} K_{Y,n}.$$

- Na data $t_{X,m}$ com $m \geq 1$, Y paga a X os juros correspondentes ao capital nocional $K_{X,m}$,

$$\alpha_X(t_{X,m-1}, t_{X,m}) \rho_{X,m} K_{X,m}.$$

¹⁵start date.

¹⁶maturity date.

As datas $t_{X,m} < u$ e $t_{Y,n} < u$ designam-se datas de reajuste da taxa de juro¹⁷ e as datas $t_{X,m} > s$ e $t_{Y,n} > s$ chamam-se datas de pagamento¹⁸.

Definição 1.35. Se pelo contrato de *swap* o agente Y tem de pagar os juros devidos por X à taxa de juro fixa $\rho_{X,m} = r$ recebendo os juros por si devidos à taxa de juro variável $\rho_{Y,n}$, diz-se que o agente Y é o *pagador do swap*¹⁹ e que X é o *recebedor do swap*²⁰.

Observe-se que, quando $t_{X,m} = t_{Y,n}$, o valor líquido do *cashflow* nessa data para o agente económico X é

$$\psi(s, t_n) = K_{X,m}\alpha_X(t_{X,m-1}, t_{X,m})\rho_{X,m} - K_{Y,n}\alpha_Y(t_{Y,n-1}, t_{Y,n})\rho_{Y,n}.$$

O valor atualizado na data s dos pagamentos que o agente económico X tem de fazer ao agente económico Y é portanto

$$\Pi_Y(s, t_0, u; K_Y, \alpha_Y, t_Y, F_Y, \nu) := \left[\sum_{n=1}^{N_Y} \nu(s, t_n) K_{Y,n} \alpha_Y(t_{Y,n-1}, t_{Y,n}) \rho_{Y,n} | \mathcal{F}(s) \right].$$

Por sua vez, o valor atualizado na data s dos pagamentos que o agente económico Y tem de fazer ao agente económico X é portanto

$$\Pi_X(s, t_0, u; K_X, \alpha_X, t_X, F_X, \nu) := \left[\sum_{m=1}^{N_X} \nu(s, t_m) K_{X,m} \alpha_X(t_{X,m-1}, t_{X,m}) \rho_{X,m} | \mathcal{F}(s) \right].$$

Definição 1.36. A variável $\mathcal{F}(s)$ -aleatória,

$$\mathbf{Swap}(s, t_0, u; t_X, K_X, F_X, \alpha_X, K_Y, t_Y, F_Y, \alpha_Y, \nu) = \Pi_Y - \Pi_X$$

é o valor que X tem que pagar a Y na data s pelo contrato de swap para que os valores atuais dos pagamentos efetuados por cada uma das partes do contrato sejam iguais. Diz-se que **Swap** é o preço do contrato de swap.

Observação 1.37. Só introduzindo estocasticidade nos processos F_X e F_Y é que se poderá ter $\Pi_X \neq \Pi_Y$.

No caso em que $n = m = 1$, ou seja, em que existe apenas uma data de pagamento e $\rho_{X,1} = r$ é uma taxa de juro pré-fixada na data de contrato e $\rho_{Y,1}$ é uma taxa de juro variável, diz-se que este contrato de swap é um acordo de taxas de juro a prazo²¹. Nesta situação o cashflow líquido de X na data $u = t_1$ por unidade de nocional é

$$\alpha_Y(t_0, t_1)\rho_{Y,1} = \alpha_X(t_0, t_1)r.$$

¹⁷reset dates.

¹⁸payment dates.

¹⁹swap payer.

²⁰swap receiver.

²¹Forward Rate Agreement - FRA.

No caso em que $N_X = N_Y = N$, $t_{Y,n} = t_{X,m}$ e as taxas de juro $\rho_{X,m}$ são pré-fixadas na data de contrato, pode-se encarar o contrato de *swap* como uma sucessão de N *FRAs*.

Observação 1.38. Note-se que $\Pi_X(s, t_0, u; K_X, \alpha_X, t_X, F_X, \nu)$ e $\Pi_Y(s, t_0, u; K_Y, \alpha_Y, t_Y, F_Y, \nu)$ são normalmente variáveis aleatórias uma vez que dependem das taxas de juro $\rho_{X,m}$ e $\rho_{Y,n}$ que podem ser desconhecidas na data s .

Uma forma de contornar esta questão é supor que as taxas de juro $\rho_{X,m}$ e $\rho_{Y,n}$ (quando variáveis ao longo do tempo e não são conhecidas na data de contrato) admitem uma estrutura a prazo

$$\rho_{X,m} = F_X(s, t_{X,m-1}, t_{X,m}) + \sigma_{X,m} \quad \rho_{Y,n} = F_Y(s, t_{Y,n-1}, t_{Y,n}) + \sigma_{Y,n},$$

onde F_X e F_Y são estruturas a prazo das taxas de juro simples do mercado (por exemplo, LIBOR ou EURIBOR), $\sigma_{X,m}$ e $\sigma_{Y,n}$ são os *spreads* a aplicar às taxas de juro F_X e F_Y nas datas $t_{X,m}$ e $t_{Y,n}$ respectivamente. Admite-se também que as curvas de rentabilidade teóricas $F_X(s, t, u)$ e $F_Y(s, t, u)$ podem ser estimadas na data s usando a informação disponível nesta data, nomeadamente as taxas $F_X(s, t)$, $F_Y(s, t)$ e $B(s, t)$.

Definição 1.39. Suponha-se que o agente económico X tem um contrato de amortização de nocional a uma taxa de juro simples $\rho_{X,m}$ constante igual a r_{swap} e que $s \leq t_0$. O valor r_{swap} para o qual

$$\Pi_X(s, t_0, u; K_X, \alpha_X, t_X, F_X = r_{swap}, \nu(s, -)) = \Pi_Y(s, t_0, u; K_Y, \alpha_Y, t_Y, F_Y, \nu(s, -)),$$

ou seja,

$$\sum_{m=1}^{N_X} \nu(s, t_m) K_{X,m} \alpha_X(t_{X,m-1}, t_{X,m}) r_{swap} = \sum_{n=1}^{N_Y} \nu(s, t_n) K_{Y,n} \alpha_Y(t_{Y,n-1}, t_{Y,n}) \rho_{Y,n},$$

é, portanto,

$$r_{swap}(s, t_0, u, F_Y, K_X, K_Y, \nu(s, -)) = \frac{\sum_{n=1}^{N_Y} \nu(s, t_n) K_{Y,n} \alpha_Y(t_{Y,n-1}, t_{Y,n}) \rho_{Y,n}}{\sum_{m=1}^{N_X} \nu(s, t_m) K_{X,m} \alpha_X(t_{X,m-1}, t_{X,m})}. \quad (1.27)$$

Diz-se que r_{swap} é a taxa de juro de swap a prazo para o comprador X, relativa ao swap contratado para o período no período $[t_0, u]$.

No caso particular em que $s = t_0$, $r_{swap}(s, u, F_Y, K_X, K_Y, \nu(s, -))$ é a taxa de juro de swap à vista para o comprador X, relativa ao swap contratado para o período no período $[s, u]$.

Definição 1.40. Considere-se o caso particular em que $K = K_{X,m} = K_{Y,n} = 1$, para todo o m e n , $N = N_X = N_Y$ e F é uma taxa de juro simples. Além disso a função contagem

de dias é igual para as duas partes $\alpha = \alpha_X = \alpha_Y$. Pela definição (1.32), e admitindo que o mercado é livre de arbitragem, pelo que $\nu(s, t) = B(s, t)^{22}$, supondo $s \leq t_0$, tem-se

$$\begin{aligned} r_{swap}(s, t_0, t_N, F, B(s, -)) &= \frac{\sum_{n=1}^N B(s, t_n) \alpha(t_{n-1}, t_n) F(s, t_{n-1}, t_n)}{\sum_{n=1}^N \alpha(t_{n-1}, t_n) B(s, t_n)} \\ &= \frac{\sum_{n=1}^N B(s, t_n) \alpha(t_{n-1}, t_n) \left(\frac{1}{\alpha(t_{n-1}, t_n)} \frac{B(s, t_{n-1})}{B(s, t_n)} - 1 \right)}{\sum_{n=1}^N \alpha(t_{n-1}, t_n) B(s, t_n)} \\ &= \frac{\sum_{n=1}^N B(s, t_n) \alpha(t_{n-1}, t_n) \left(\frac{1}{\alpha(t_{n-1}, t_n)} \frac{B(s, t_{n-1})}{B(s, t_n)} - 1 \right)}{\sum_{n=1}^N \alpha(t_{n-1}, t_n) B(s, t_n)}. \end{aligned}$$

Lembrando a relação (1.18) vem que

$$\begin{aligned} r_{swap}(s, t_0, t_N, F, B(s, -)) &= \frac{\sum_{n=1}^N B(s, t_n) \left(\frac{B(s, t_{n-1})}{B(s, t_0)} \frac{B(s, t_0)}{B(s, t_n)} - 1 \right)}{\sum_{n=1}^N \alpha(t_{n-1}, t_n) B(s, t_n)} \\ &= \frac{B(s, t_0) - B(s, t_N)}{\sum_{n=1}^N \alpha(t_{n-1}, t_n) B(s, t_n)}. \end{aligned}$$

Diz-se que $r_{swap}(s, t_0, t_N, F, B(s, -))$ é a taxa de juro de swap a prazo ao par no período $[t_0, t_N]$.

No caso particular em que $s = t_0$, $r_{swap}(s, t_N, F, B(s, -))$ diz-se a taxa de juro de swap à vista ao par no período $[t_0, t_N]$.

Definição 1.41. Um *overnight index swap OIS* é um swap com

- uma única data de pagamento de juros $t_1 = u$ - ou seja, é um FRA - sendo as maturidades fixadas entre 7 dias e 1 ano, $7 \leq \alpha(t_0, t_1) \leq N_{year}$, onde N_{year} é o número de dias num ano, de acordo com o método escolhido para a contagem de dias.
- um nocional K .
- uma permuta de taxa de juro fixa $r = \rho_{X,1}$ - OIS *swap rate*- pela taxa de juro variável

$$\rho = \rho_{Y,1} = \prod_{k=1}^{N_\beta} \left(1 + \frac{\beta_k r_Y(t'_k)}{N_{year}} \right) - 1 \quad (1.28)$$

que é a média geométrica das taxas de juro instantâneas de curto prazo (*overnight rate*) $r_Y(t'_k)$ associadas a uma estrutura de taxas de juro simples a prazo, $F_Y(s, t)$ entre as datas t_0 e $t_1 = u$, sendo $N_\beta = \alpha_Y(t_0, t_1)$ o número de dias de transação financeira²³ entre as datas t_0 e t_1 , t'_k é o k-ésimo dia de transação financeira e β_k o número de dias de transações financeiras entre o dia t'_k e o dia t'_{k+1} , sendo $t'_1 = t_0$ e t'_N o último dia de transação financeira antes do dia $t_1 = u$.

²²na prática esta igualdade tem de ser entendida como aproximação.

²³business days.

- Nos Estados Unidos da América, a *overnight rate* é a taxa efectiva de aquisição de fundos da Reserva Federal (*FED Fund*).
- Na Zona Euro, a *overnight rate* é a taxa de juro *Euro Overnight Interbank Index Average*(*EONIA*).

Para um *swap OIS* com maturidade residual $N = t_1 - t_0$ (dias) tem-se

$$\Pi_X(s, t_0, t_1; K, \alpha, t_X, F_X = r, \nu = B) = K\alpha(t_0, t_1)rB(s, t_1)$$

$$\Pi_Y(s, t_0, t_1; K, \alpha_Y, t_Y, F_Y, \nu) = K \left(\prod_{k=1}^{N_\beta} \left(1 + \frac{\beta_k r_Y(\tau_k)}{N_{year}} \right) - 1 \right) B(s, t_1).$$

Portanto, a taxa de juro de um *swap OIS* é

$$r_{OIS} = \frac{\prod_{k=1}^{N_\beta} \left(1 + \frac{\beta_k r_Y(\tau_k)}{N_{year}} \right) - 1}{\alpha(t_0, t_1)}. \quad (1.29)$$

1.5.1 Exemplos de taxas de juro em contratos de *swap*

As taxas de juro ρ_n em contratos de *swap* são, em geral, de um dos seguintes tipos,

1. $\rho_n = r$, taxa de juro constante.
2. $\rho_n = r_n$ taxa de juro conhecida e pré-fixada para a etapa n do contrato.
3. $\rho_n = F(t_{n-1}, t_n) + \sigma_n$, sendo $F(t_{n-1}, t_n)$ uma estrutura a prazo de uma taxa de juro simples (por exemplo *LIBOR*) e σ_n é o *spread* para a etapa n do contrato.
4. taxa de juro com limite máximo (chama-se a este *swap* um *cap* de taxas de juro)

$$\rho_n = \min(F(t_{n-1}, t_n) + \sigma_n, \rho_{max}),$$

onde ρ_{max} é o valor máximo que a taxa de juro pode ter. Se pelo contrato de *swap* o agente económico X ficar a pagar os juros do agente económico Y à taxa de juro $\min(F_Y(t_{n-1}, t_n) + \sigma_{Y,n}, \rho_{Y,max})$ ficará pelo menos protegido de subidas da taxa de juro variável para além do valor $\rho_{Y,max}$.

5. taxa de juro com limite mínimo (chama-se a este *swap* um *floor* de taxas de juro)

$$\rho_n = \max(F(t_{n-1}, t_n) + \sigma_n, \rho_{min}),$$

onde ρ_{min} é o valor mínimo que a taxa de juro pode ter. Se pelo contrato de *swap* o agente económico Y ficar a pagar os juros do agente económico X à taxa de juro $\min(F_X(t_{m-1} + \sigma_{X,m}, t_m), \rho_{X,max})$ ficará pelo menos protegido de descidas da taxa de juro variável abaixo do valor $\rho_{X,min}$.

1.5.2 Preço de um *caplet*

Num mercado financeiro sem fricção os *spreads* são nulos.

Um *caplet* é um FRA contratado na data s que expira em t_{k-1} e cuja data de pagamento é t_k . Ou seja, é uma opção europeia sobre a taxa de juro simples variável $F_k(t_{k-1})$ com preço de exercício y (limite máximo). A sua dívida contingente é

$$H^E(t_{k-1}, t_k, F_k(t_{k-1}), y | \mathcal{F}(s), \kappa) = \tau_k \left(\kappa (F_k(t_{k-1}) - y)^+ \right), \quad (1.30)$$

onde $\kappa = 1$.

Recordando (1.12), o preço da dívida contingente (1.30) atualizado na data s é

$$\pi(H^E(t_{k-1}, t_k, F_k(t_{k-1}), y | \mathcal{F}(s), \kappa)) = \tau_k \nu(s, t_k) \mathbb{E}_{\mathbb{Q}(s)} \left((\kappa (F_k(t_{k-1}) - y))^+ \right). \quad (1.31)$$

O preço do *caplet* denota-se por

$$\mathbf{Caplet}(t_{k-1}, t_k, F_k(t_{k-1}), y | \mathcal{F}(s)) = \pi(t_{k-1}, t_k, F_k(t_{k-1}), y | \mathcal{F}(s), \kappa = 1).$$

Seja $y^{ATM} = F_k(s)$, o preço de exercício dir-se-á

$$ATM^{24}, \text{ se } y = y^{ATM}, \quad ITM^{25}, \text{ se } y < y^{ATM}, \quad OTM^{26}, \text{ se } y > y^{ATM}.$$

Na data de maturidade t_{k-1} o *caplet* diz-se

$$ATM, \text{ se } y = F_k(t_{k-1}), \quad ITM, \text{ se } y < F_k(t_{k-1}), \quad OTM, \text{ se } y > F_k(t_{k-1}).$$

O caso dos *floorlets* é análogo (caso em que $\kappa = -1$, ou seja, o caso de uma opção europeia de venda.). O preço de um *floorlet* é

$$\mathbf{Floorlet}(t_{k-1}, t_k, F_k(t_{k-1}), y | \mathcal{F}(s)) = \pi(t_{k-1}, t_k, y | \mathcal{F}(s), \kappa = -1).$$

Aqui utiliza-se a terminologia ITM quando $y > y^{ATM}$ e OTM quando $y < y^{ATM}$, no caso dos preços de exercício, e relativamente ao *floorlet* diz-se ATM quando $y = F_k(t_{k-1})$, ITM quando $y > F_k(t_{k-1})$ e OTM quando $y < F_k(t_{k-1})$.

1.5.3 Preço de um *cap*

Um *cap* é uma sucessão finita de *caplets* que cobrem períodos consecutivos compreendidos entre $\{t_m, t_{m+1}, \dots, t_n\}$, no sentido em que um *caplet* começa na data em que termina o anterior, que limita superiormente os valores do processo das taxas de juro simples F

²⁴at-the-money.

²⁵in-the-money.

²⁶out-the-money.

em $[t_m, t_n[$. Todos os caplets têm o mesmo preço de exercício y do cap definido na data de contrato s . Fazendo $\kappa = 1$, o cap é a dívida contingente

$$\begin{aligned} H^{cap}(t_m, t_n, F, y | \mathcal{F}(s), \kappa = 1) &= \sum_{k=m+1}^n H^E(t_{k-1}, t_k, F_k(t_{k-1}), y | \mathcal{F}(s), \kappa = 1) \\ &= \sum_{k=m+1}^n \tau_k \left(\kappa (F_k(t_{k-1}) - y)^+ \right). \end{aligned} \quad (1.32)$$

Por conseguinte, o preço da dívida contingente (1.32) na data s é

$$\begin{aligned} \pi(H^{cap}(t_m, t_n, F, y | \mathcal{F}(s), \kappa = 1)) &= \sum_{k=m+1}^n \pi(t_k, t_{k+1}, F_k(t_{k-1}), y | \mathcal{F}(s), \kappa = 1) \\ &= \sum_{k=m+1}^n \tau_k \nu(s, t_k) \mathbf{Caplet}(t_k, t_{k+1}, F_k(t_{k-1}), y | \mathcal{F}(s)) \\ &= \sum_{k=m+1}^n \tau_k \nu(s, t_k) \mathbb{E}_{\mathbb{Q}(s)} \left((\kappa (F_k(t_{k-1}) - y))^+ \right). \end{aligned} \quad (1.33)$$

O preço do *cap* é

$$\mathbf{Cap}(t_m, t_n, F, y | \mathcal{F}(s)) = \pi(H^{cap}(t_m, t_n, F, y | \mathcal{F}(s), \kappa = 1)).$$

Seja y^{ATM} a taxa de juro de *swap* a prazo

$$S_{m,n}(s) = r_{swap}(s, t_m, t_n). \quad (1.34)$$

O preço de exercício dir-se-á

$$ATM, \text{ se } y = y^{ATM}, \quad ITM, \text{ se } y < y^{ATM}, \quad OTM, \text{ se } y > y^{ATM}.$$

Na data de maturidade t_m o cap diz-se

$$ATM, \text{ se } y = S_{m,n}(t_m), \quad ITM, \text{ se } y < S_{m,n}(t_m), \quad OTM, \text{ se } y > S_{m,n}(t_m).$$

O caso dos *floors* é análogo (caso em que $\kappa = -1$). O preço de um *floor* é

$$\mathbf{Floor}(t_m, t_n, F, y | \mathcal{F}(s)) = \pi^E(H^E(t_m, t_n, F, y | \mathcal{F}(s), \kappa = -1)).$$

Aqui utiliza-se a terminologia ITM quando $y > y^{ATM}$ e OTM quando $y < y^{ATM}$, no caso dos preços de exercício, e relativamente ao floor este diz-se ATM quando $y = S_{m,n}(t_m)$, ITM quando $y > S_{m,n}(t_m)$ e OTM quando $y < S_{m,n}(t_m)$.

1.5.4 Preço de uma opção de *swap*

Definição 1.42. Uma opção de swap²⁷ com maturidade na data t_m , confere ao comprador o direito, mas não a obrigação, de entrar - como pagador ou recebedor - num contrato

²⁷swaption - opção sobre um contrato de swap.

de *swap* de taxas de juro na data t_m , mediante o pagamento do preço da opção acordado entre ambas as partes na data s ,

- opção europeia de swap: na data s o investidor realiza o seguinte contrato:

Na data $t_m > s$, depois de conhecer a taxa de juro de swap $S_{m,n}(t_m) = r_{swap}(t_m, t_m, t_n)$, o investidor X tem o direito mas não tem a obrigação de entrar num contrato de swap com início na data t_m e maturidade na data t_n , a taxa de juro de swap de exercício é y , sendo a dívida contingente por unidade de portfólio a variável $\mathcal{F}(t_m)$ -aleatória,

$$H^{swaption}(t_m, t_n, S_{m,n}(t_m), y | \mathcal{F}(s), \kappa) = (\kappa(S_{m,n}(t_m) - y))^+,$$

onde $\kappa = 1$ se é uma opção de compra e $\kappa = -1$ se é uma opção de venda.

O preço unitário livre de arbitragem da opção europeia de swap é

$$\pi(s, H^{swaption}(s, t_m, t_n, S_{m,n}(t_m), y | \mathcal{F}(s), \kappa)) = V(s, \varphi),$$

que é o valor atualizado na data s de uma estratégia de negócio admissível φ tal que $V(t_m, \varphi) = H^{swaption}(t_m, t_m, t_n, S_{m,n}(t_m), y | \mathcal{F}(s), \kappa)$. Ou seja,

$$\begin{aligned} \pi(s, H^{swaption}(t_m, t_n | \mathcal{F}(s), \kappa)) &= \\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}(s)} \left(\kappa \left(\sum_{k=m+1}^N \tau_k \nu(t_m, t_k) \alpha(t_{k-1}, t_k) F_k(t_m) - \sum_{k=m+1}^N \nu(t_m, t_k) \alpha(t_{k-1}, t_k) y \right) \right)^+ \\ &= \left(\sum_{k=m+1}^N \nu(t_m, t_k) \alpha(t_{k-1}, t_k) \right) \mathbb{E}_{\mathbb{Q}(s)} \left((\kappa(S_{m,n}(t_m) - y))^+ \right), \end{aligned}$$

que é a diferença entre os valores atualizados, na data t_m de início do *swap* subjacente à opção europeia, dos pagamentos da *fixed leg* (feitos pelo pagador do swap) e dos pagamentos da *floating leg* (feitos pelo recebedor do swap).

O preço da opção de pagador de swap, $\kappa = 1$, é

$$\mathbf{Swaption}^P(t_m, t_n, S_{m,n}(t_m), y | \mathcal{F}(s)) = \pi^E(s, H^{swaption}(t_m, t_n, S_{m,n}(t_m), y | \mathcal{F}(s), \kappa = 1)).$$

O preço da opção de recebedor de swap, $\kappa = -1$, é

$$\mathbf{Swaption}^R(t_m, t_n, S_{m,n}(t_m), y | \mathcal{F}(s)) = \pi^E(s, H^{swaption}(t_m, t_n, S_{m,n}(t_m), y | \mathcal{F}(s), \kappa = -1))$$

Seja y^{ATM} a taxa de juro de *swap* a prazo

$$S_{m,n}(s) = r_{swap}(s, t_m, t_n).$$

O preço de exercício dir-se-á

$$ATM, \text{ se } y = y^{ATM}, \quad ITM, \text{ se } y < y^{ATM}, \quad OTM, \text{ se } y > y^{ATM}.$$

Na data de maturidade t_m a opção europeia de swap diz-se

$$ATM, \text{ se } y = S_{m,n}(t_m), \quad ITM, \text{ se } y < S_{m,n}(t_m), \quad OTM, \text{ se } y > S_{m,n}(t_m).$$

No caso da opção europeia de recebedor de swap, utiliza-se a terminologia ITM quando $y > y^{ATM}$ e OTM quando $y < y^{ATM}$, relativamente aos preços de exercício. Esta opção diz-se ATM quando $y = S_{m,n}(t_m)$, ITM quando $y > S_{m,n}(t_m)$ e OTM quando $y < S_{m,n}(t_m)$.

1.6 Modelos para a estrutura a prazo de taxas de juro

Frequentemente as instituições financeiras - da banca às grande financeiras passando pelas companhias de seguro - têm que estimar a estrutura a prazo das taxas de juro. Esta estimação pode ter por base modelos empíricos, como o método de *bootstrapping*, modelos paramétricos, como o modelo de McCulloch (*splines*), ou o modelo de *Nelson-Siegel-Svensson*, descritos em seguida.

1.6.1 Método de *bootstrapping*

Suponha-se que se dispõe de N_B obrigações ordenadas por ordem crescente das datas de maturidade $m_1 = t_1 < \dots < m_{N_B} = t_{N_B}$ e que essas datas de maturidade residual são distintas duas a duas. Considera-se também que as datas de resgate do nocional da obrigação j são $t_1 < \dots < t_j$. A data de maturidade da obrigação i é m_{N_i} .

O preço por unidade de nocional da obrigação n com maturidade na data t_n é

$$P_n(t_0) = \sum_{i=1}^n B(t_0, t_i) \psi_n(t_{i-1}, t_i)$$

onde

$$\psi_n(t_{i-1}, t_i) = R_i + \left(1 - \sum_{k=1}^i R_k\right) \rho_k.$$

representa o *cashflow* no intervalo $]t_{k-1}, t_k]$ associado à obrigação n , sendo que ρ_k é a taxa de juro simples de cupão da obrigação k na data t_k e R_k é a fracção do nocional que é resgatado na data t_k .

Conhecendo os N_B preços das obrigações, os preços das *ZCB* ficam determinados resolvendo o sistema de equações, escrito na forma matricial como

$$\psi B = P,$$

onde $\psi = (\psi(t_i, t_j))_{0 \leq i \leq N_B-1, 1 \leq j \leq i+1}$ é uma matriz quadrada triangular inferior com N_B linhas, $P = (P_i(t_0))_{1 \leq i \leq N_B}$ é a matriz coluna dos preços das *ZCB* e $B = (B(t_0, t_i))_{1 \leq i \leq N_B}$ é a matriz coluna dos preços das *ZCB* a determinar.

1.6.2 Método de McCulloch

Trata-se de um método proposto por *J. Huston McCulloch* [20] para o ajustamento de uma função *spline* à função de desconto $B(t_0, t)$.

Na data t_0 existe um conjunto de N_B obrigações com datas de maturidade $t_{N_{T,1}}, \dots, t_{N_{T,N_B}}$ - não necessariamente distintas -, maiores ou iguais que t_0 e ordenadas por ordem crescente. Seja $u_* = t_{N_{T,N_B}} - t_0$ a maior das maturidades residuais observadas. O intervalo $[0, u_*]$ é dividido em $n-2$ subintervalos definidos por $n-1$ pontos, $0 = u_1 < u_2 < \dots < u_{n-1} = u_*$. A função $t \mapsto B(s, t)$ é definida para $s \leq t \leq t_{N_{T,N_B}}$ por

$$B(s, t) = 1 + \sum_{k=1}^n \beta_k g_k(t - s)$$

onde $\beta = (\beta_k)_{1 \leq k \leq n}$ é a matriz coluna de parâmetros e cada função $g_k : [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ é uma função seccionalmente polinomial.

A estimação dos parâmetros β pode ser feita pelo método dos mínimos quadrados, minimizando a soma do quadrado dos resíduos entre preços observados e preços modelados.

1.6.3 Modelo de Nelson-Siegel-Svensson

Nelson e *Siegel* publicaram um artigo [22] no qual propuseram um modelo para a taxa de rentabilidade instantânea de uma ZCB. Este modelo permite reproduzir algumas formas observadas para as curvas de rentabilidade $Y(s, t)$, por exemplo, comportamento monótono, concavidade para cima ou para baixo - neste caso designa-se por *hump* - ou inflexões da concavidade.

Mais tarde, *Svensson* publicou [27] uma generalização do modelo de *Nelson-Siegel*[3] - posteriormente modificada por *Björk* e *Christensen* [3] - de modo a incluir mais um *hump* na curva $Y(t, Y)$. A expressão obtida já após a modificação é

$$Y(t, t+m) = \beta_0(t)Y_0(t, t+m) + \beta_1(t)Y_1(t, t+m) \\ + \beta_2(t)Y_2(t, t+m) + \beta_3(t)Y_3(t, t+m),$$

$$Y_0(t, t+m) = 1, \quad Y_1(t, t+m) = \left(\frac{1 - \exp\left(-\frac{m}{\tau_1(t)}\right)}{\frac{m}{\tau_1(t)}} \right), \\ Y_2(t, t+m) = \left(\frac{1 - \exp\left(-\frac{m}{\tau_1(t)}\right)}{\frac{m}{\tau_1(t)}} - \exp\left(-\frac{m}{\tau_1(t)}\right) \right), \\ Y_3(t, t+m) = \left(\frac{1 - \exp\left(-\frac{m}{\tau_2(t)}\right)}{\frac{m}{\tau_2(t)}} - \exp\left(-\frac{2m}{\tau_2(t)}\right) \right),$$

sendo $\theta(t) = (\tau(t), \beta(t)) = (\tau_1(t), \tau_2(t), \beta_0, \beta_1(t), \beta_2(t), \beta_3(t))$ o vetor de parâmetros do modelo. No que se segue, designa-se este modelo - com modificação - por modelo de *Svenson*. Este modelo é utilizado diariamente pelo Banco Central Europeu (BCE) e pelo Banco Central Alemão (Bundesbank) para calcular a estrutura a prazo das ZCB dia a dia. Estes parâmetros têm as seguintes restrições e significado

- β_0 é o valor assintótico de $m \rightarrow Y(t, t+m)$ em $m = \infty$, ou seja,

$$\beta_0 = \lim_{m \rightarrow \infty} Y(t, t+m),$$

Pode-se entender como a taxa de rentabilidade de longo prazo. Por razões económicas impõe-se a $\beta_0 > 0$. Diz-se que a componente $\beta_0 Y_0$ é a componente de longo prazo do modelo.

- Pela regra de *L'Hôpital*

$$\beta_0 + \beta_1 = Y(t, t^+) = \lim_{m \rightarrow 0^+} Y(t, t+m).$$

A função $Y_1(t, m)$ é monotonamente decrescente. Esta função toma o valor 1 em $m = 0$ a uma taxa exponencial. Diz-se que $\beta_1 Y_1$ é a componente de curto prazo do modelo.

- β_1 determina o sinal da velocidade com que a taxa de rentabilidade $Y(t, m)$ se aproxima da taxa de rentabilidade de longo prazo.
- $\tau_1 > 0$ determina a taxa de decrescimento exponencial da componente de curto prazo.
- A função $\beta_2 Y_2$ tem valor 0 em $m = 0$, é crescente até uma data $m(\tau_1) = \tau_1 m > 0$, e depois decresce rapidamente para zero. Por isso, se chama a componente de médio prazo do modelo..
- β_2 determina o tipo de concavidade da componente de médio prazo $\beta_2 Y_2$ numa vizinhança de τ_1^* . Se $\beta_2 > 0$ numa vizinhança de τ_1^* a curva de rentabilidade é côncava, se $\beta_2 < 0$ é convexa.
- A função Y_3 toma o valor 0 em $m = 0$, é crescente até uma data $m = \tau_2^* > 0$ e depois decresce rapidamente para zero. Por isso, se chama a $\beta_3 Y_3$ a segunda componente de médio prazo.
- $\tau_2 \geq \tau_1$ determina a taxa de decrescimento exponencial a partir de τ_2 .

- β_3 determina o tipo de concavidade da curva de rentabilidade numa vizinhança de τ_2^* . Se $\beta_3 > 0$ numa vizinhança de τ_2 a curva de rentabilidade é côncava. Se $\beta_3 < 0$ numa vizinhança de τ_2 a curva é convexa.

Uma forma de estimar os parâmetros $\theta(t)$ é minimizar a soma dos quadrados da diferença entre as taxas de rentabilidade na maturidade estimadas e as observadas. Fixado o par $\tau = (\tau_1(t), \tau_2(t))$, este é um problema de mínimos quadrados lineares nos parâmetros $\beta = (\beta_0(t), \beta_1(t), \beta_2(t), \beta_3(t))$.

1.7 Convenções de mercado

1.7.1 Métodos de contagem de dias

A contagem de dias nos mercados financeiros está regulada por convenções internacionais [15]. Tipicamente o método de contagem varia em função dos países onde são realizados os negócios e do tipo de instrumento financeiro a que se destina. Diferentes métodos de contagem de dias podem induzir diferenças significativas nos resultados dos modelos utilizados para o cálculo dos preços.

Apresentam-se dois métodos de contagem de dias da chamada família *Actual* [2] que vigoram principalmente nos mercados da zona *Euro* e nos mercados dos Estados Unidos da América.

Sejam t_1 e t_2 duas datas de \mathbb{T} tais que $t_1 \leq t_2$. Nestes métodos o número de dias entre t_1 e t_2 é igual ao número de dias do calendário juliano entre t_1 e t_2 e nota-se por $\mathbf{Ndays}(t_1, t_2)$. O número de dias a considerar em cada ano é que pode variar consoante o método.

- método *Actual/360*:

$$\alpha(t_1, t_2) = \frac{\mathbf{Ndays}(t_1, t_2)}{360}$$

- método *Actual/Actual*²⁸:

Neste método o número de dias corresponde ao número de dias de cada ano (365 se o ano for comum e 366 se o ano for bissexto).

• $\mathbf{Ndays}_c(t_1, t_2)$ é o número de dias em anos comuns que estão entre t_1 e t_2 ;

• $\mathbf{Ndays}_l(t_1, t_2)$ é o número de dias em anos bissextos que estão entre t_1 e t_2 ;

$$\alpha(t_1, t_2) = \frac{\mathbf{Ndays}_c(t_1, t_2)}{365} + \frac{\mathbf{Ndays}_l(t_1, t_2)}{366}.$$

²⁸também conhecido por *Actual/365*.

1.8 Dados de mercado

Os dados de mercado utilizados provêm do simulador *Swap Pricer* da plataforma *Thomson Reuters Eikon* da *Thomson Reuters*.

Tratam-se de dados relativos a caps e opções europeias de compra sobre swaps de pagadores, ambos os casos, relativos à taxa EURIBOR.

Foram recolhidos dados diários relativos a março e abril de 2014 sobre a volatilidade implícita (em fração decimal) cotada no mercado para os derivativos considerados e sobre as curvas de desconto utilizadas para cada dia de transação.

A volatilidade de swaptions está cotada de acordo com o par expiry-tenor para preços de exercício expressos como spreads (variando até 150 pontos base) relativamente ao forward (em fração decimal).

Os dados de caps têm uma apresentação idêntica mas as volatilidades estão expressas em

Expiry	Tenor	Forward	-150	-100	-50	-25	0	25	50	100	150
1M	1Y	0.00				1.16	0.78	0.71	0.72	0.78	0.82
3M	1Y	0.00				1.13	0.74	0.67	0.68	0.73	0.77
6M	1Y	0.00				1.23	0.81	0.68	0.67	0.71	0.75
1Y	1Y	0.01			1.29	0.94	0.88	0.85	0.84	0.82	0.81
2Y	1Y	0.01			1.30	0.99	0.83	0.76	0.75	0.79	0.83
3Y	1Y	0.01		1.07	0.74	0.67	0.63	0.61	0.60	0.60	0.61
					...						
1M	2Y	0.01			1.27	0.58	0.62	0.63	0.64	0.64	0.64
3M	2Y	0.01			1.00	0.65	0.61	0.59	0.58	0.57	0.57
6M	2Y	0.01			1.05	0.72	0.64	0.61	0.59	0.57	0.57
1Y	2Y	0.01			1.08	0.79	0.67	0.62	0.60	0.60	0.62
2Y	2Y	0.01		1.05	0.68	0.63	0.59	0.56	0.53	0.50	0.47
3Y	2Y	0.02	0.92	0.57	0.51	0.50	0.48	0.47	0.46	0.45	0.44
					...						

Tabela 1.1: Excerto dos dados retirados do *Swap Pricer* para swaptions de 2014-03-17.

função do expiry e preço de exercício (absoluto e não em spread).

Através da plataforma *Thomson Datastream* recolheu-se ainda informação relativamente às taxas EURIBOR e LIBOR, às taxas de FRA e taxas de swap do mercado europeu.

Capítulo 2

Modelo HJM em tempo discreto

O objectivo deste capítulo é descrever uma generalização do modelo discreto de *Heath-Jarrow-Morton*, *HJM*, [14] a L factores aleatórios, e identificar o modelo multinomial de *Ho-Lee*[16] como caso particular.

Considere-se a família de preços das ZCB, $(B(t, u))_{(t, u) \in \mathbb{T}^2}$. Fixado $t \leq u$, $(B(t, u))_{u \in \mathbb{T}}$ é estrutura a prazo dos preços das ZCB na data t .

Notação 2.1. Usa-se a seguinte notação $Y_\delta(s, t) = Y(s, t, t + 1)$.

Pela relação (1.19), os preços podem ser escritos da seguinte forma,

$$B(t, u) = B(t, u - 1) \exp(-\tau_{u-1} Y_\delta(t, u - 1))$$

Por recorrência, obtém-se

$$B(t, u) = \exp \left(- \sum_{j=t}^{u-1} \tau_j Y_\delta(t, j) \right). \quad (2.1)$$

Note-se que $(Y_\delta(t, u))_{(t, u) \in \mathbb{T}^2}$ é a taxa de juro de curto prazo esperada para o período $[u, u + 1[$ que é induzida pelas ZCB, dada a σ -álgebra $\mathcal{F}(t)$, ou seja,

$$Y_\delta(t, u) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(Y_\delta(u, u) | \mathcal{F}(t)) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(r(u) | \mathcal{F}(t)).$$

2.1 Perturbações estocásticas

Numa data $t \in \mathbb{T}$ arbitrária, $(\Omega^*(t), \mathcal{P}(\Omega^*(t)), \mathbb{P}^*(t))$ é um espaço de probabilidade onde,

- $\Omega^*(t) = \Omega_1^*(t) \times \cdots \times \Omega_L^*(t)$ é o espaço amostral, produto cartesiano de L conjuntos finitos, tais que

$$\Omega_l^*(t) = \{a_l(1), \dots, a_l(M_l(t))\}, \quad |\Omega_l^*(t)| \geq 2, \quad (\forall l \in \mathbb{L}),$$

sendo $M_l(t) \in \mathbb{N}$, para todo o $t \in \mathbb{T}$ e $l \in \mathbb{L}$, $\mathbb{L} = \{1, \dots, L\}$. Denota-se ainda $\mathbb{M}_l(t) = \{1, \dots, M_l(t)\}$.

O espaço amostral tem, portanto, $M(t) = \prod_{l \in \mathbb{L}} M_l(t)$ elementos. $\Omega_l^*(t)$ é o espaço amostral do l -ésimo fator influenciador da perturbação estocástica.

- O vetor dos acontecimentos ocorridos na data t , é $\omega(t) \in \Omega^*$,

$$\omega(t) = \{\forall l \in \mathbb{L}, \exists k \in \mathbb{M}_l(t) : \omega_l(t) = a_l(t; k)\},$$

onde

$$a_l(t; k) = \begin{cases} 1, & \text{se } \omega_l(t) = a_l(k) \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

- $\mathcal{P}(\Omega^*(t))$ é a σ -álgebra relativamente a $\Omega_*(t)$.
- $\mathbb{P}_*(t)$ é uma medida em $\Omega^*(t)$ tal que para um elemento arbitrário $\omega(t) \in \Omega^*(t)$ se verifica em cada data $t \in \mathbb{T}$,

$$p(t; \omega(t)) := \mathbb{P}_*(t; \omega(t)) > 0, \quad \sum_{\omega(t) \in \Omega^*} p(t; \omega(t)) = 1.$$

O espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}(T), \mathbb{P})$ é o produto de N espaços de probabilidade $(\Omega^*(t), \mathcal{P}(\Omega^*(t)), \mathbb{P}_*(t))$, $t \in \mathbb{T}$. A filtração \mathcal{F} é definida por

$$\mathcal{F}(T) = \mathcal{P}(\Omega) = \sigma(\bar{\Omega}(T)), \quad \mathcal{F}(t) = \sigma(\bar{\Omega}(t)), \quad (\forall t \in \mathbb{T}).$$

No que se segue para cada $l \in \mathbb{L}$ supõe-se que a cardinalidade do espaço amostral é constante igual a um número $M_l \in \mathbb{N}$, ou seja, em todas as datas t :

$$|\Omega_l^*(t)| = M_l(t) = M_l \text{ e } \mathbb{M}_l(t) = \mathbb{M}_l.$$

Para cada par $(t, u) \in \mathbb{T}^2$, com $t \leq u$, existem funções associadas a cada conjunto $\Omega_{l \in \mathbb{L}}^*$,

$$\hat{\eta}_l(t, U) : \Omega_l^* \rightarrow \mathbb{R}^+, \quad \omega_l(t) \rightarrow \hat{\eta}_l(t, U; \omega_l(t)),$$

tais que

- (i) $\hat{\eta}_l(t, t-1; \omega_l(t)) = 0, \quad \omega_l(t) \in \Omega_{l \in \mathbb{L}}^*$;
- (ii) $\hat{\eta}_l(t, u; a_l(k)) \leq \hat{\eta}_l(t, u; a_l(k+1)), \quad k \in \mathbb{M}_l$;
- (iii) $\hat{\eta}_l(t, U; a_l(1)) < \hat{\eta}_l(t, U; a_l(M_l))$.

Daqui em diante, denota-se por $\eta_l(z; j)$, a imagem da função η_l , $l \in \mathbb{L}$, para uma maturidade residual z dada a realização do acontecimento $a(j)$, previamente denotada por $\eta_l(z; a(j))$.

2.1.1 Processo das taxas de juro à vista

A família de funções previamente introduzida, $(\hat{\eta}_l)_{l \in \mathbb{L}}$ designada família de funções de perturbação surge associada a uma família de indicatrizes, $(a_l(t; \omega(t)))_{l \in \mathbb{L}}$, que descrevem os acontecimentos realizados na data $t \in \mathbb{T}$.

A medida $\mathbb{P}^*(t)$ é, neste caso, a distribuição de probabilidade conjunta do vetor aleatório $\omega(t)$ condicionada pela história até à data t , $\bar{\omega}(t)$, e que descreve a correlação entre as suas componentes.

Uma vez conhecido o vetor $\omega(t)$, as funções $(\hat{\eta}_i)_{1 \leq i \leq L}$ caracterizam as perturbações quanto à sua magnitude. Estas funções poderão também depender da história até à data t , $\bar{\omega}(t)$. Fixada a data u , o processo taxas de juro a prazo, $Y_\delta = (Y_\delta(t, u))_{t \in \mathbb{T}}$ é o processo \mathbb{F} -adaptado definido pela lei de evolução

$$Y_\delta(t, u) = Y_\delta(0, u) + \sum_{i=1}^t \sum_{l=1}^L \sum_{k=1}^{M_l} a_l(i; k) \hat{\eta}_l(i, u; k) = Y_\delta(0, u) + \sum_{i=1}^t \sum_{l=1}^L \hat{\eta}_l(j, u; \omega_l(i)).$$

O processo das taxas de juro à vista segue a seguinte lei

$$\begin{aligned} Y_\delta(t, t) &= r(t) \\ &= Y_\delta(0, t) + \sum_{i=1}^t \sum_{l=1}^L \sum_{k=1}^{M_l} a_l(i; k) \hat{\eta}_l(i, t; k) = Y_\delta(0, t) + \sum_{i=1}^t \sum_{l=1}^L \hat{\eta}_l(j, t; \omega_l(i)). \end{aligned} \tag{2.2}$$

2.1.2 Processo dos preços descontados

O preço da (t, u) -ZCB descontado relativamente ao numerário $(X(t))_{t \in \mathbb{T}}$ na data t é

$$\tilde{B}(t, u) = \frac{B(t, u)}{X(t)} = B(t, u) \exp \left(- \sum_{j=0}^{t-1} r(j) \tau_j \right). \tag{2.3}$$

À família de preços $(\tilde{B}(t, u))_{t \in \mathbb{T}}$ chama-se processo dos preços descontados das obrigações com zero cupões.

Recorrendo às relações (2.1) e (2.3), obtém-se a seguinte expressão para o preço descontado da (t, u) -ZCB,

$$\begin{aligned} \tilde{B}(t, u) &= \exp \left(- \sum_{j=t}^{u-1} \tau_j Y_\delta(t, j) \right) \exp \left(- \sum_{j=0}^{t-1} \tau_j r(j) \right) \\ &= \exp \left(- \sum_{j=t}^{u-1} \tau_j Y_\delta(t, j) - \sum_{j=0}^{t-1} \tau_j Y_\delta(j, j) \right). \end{aligned} \tag{2.4}$$

Considere-se que a data atual é $s \in \mathbb{T}$ e que $s \leq t \leq u$ e que $\tau_k = \tau$, para todo $k \in \bar{\mathbb{T}}$, ou seja, que a diferença entre quaisquer datas consecutivas é τ . Empregando as expressões (2.1) e (2.2) em (2.4) decorre,

$$\begin{aligned} \tilde{B}(t, u) = \exp \left(-\tau \sum_{j=s}^{u-1} Y_\delta(s, j) - \tau \sum_{j=t}^{u-1} \sum_{i=1}^t \sum_{l=1}^L \hat{\eta}_l(i, j; \omega_l(i)) \right. \\ \left. - \tau \sum_{j=s+1}^{t-1} \sum_{i=1}^j \sum_{l=1}^L \hat{\eta}_l(i, j; \omega_l(i)) \right) \end{aligned} \quad (2.5)$$

Trocando a ordem dos somatórios e fazendo os devidos ajustes obtém-se

$$\begin{aligned} \tilde{B}(t, u) &= B(s, u) \exp \left(-\tau \sum_{i=s}^t \sum_{j=i}^{u-1} \sum_{l=1}^L \left[\sum_{k=1}^{M_l} a_l(i; k) \hat{\eta}_l(i, j; k) \right] \right) \\ &= B(s, u) \prod_{i=s}^t \prod_{j=i}^{u-1} \prod_{l=1}^L \prod_{k=1}^{M_l} \exp \left(-\tau \hat{\eta}_l(i, j; k) \right)^{a_l(i; k)} \end{aligned} \quad (2.6)$$

As alterações nos índices dos somatórios resultaram da seguinte propriedade,

$$\sum_{j=1}^{\bar{t}-1} \sum_{i=1}^j W(i, j) = \sum_{i=1}^{\bar{t}-1} \sum_{j=i}^{\bar{t}-1} W(i, j),$$

sendo $W(i, j)$ uma função arbitrária que depende dos índices dos somatórios.

A razão entre o preço descontado na data t e o preço descontado na data anterior $t - 1$ permite identificar a componente estocástica associada à realização do acontecimento da data t ,

$$\frac{\tilde{B}(t, u)}{\tilde{B}(t-1, u)} = \prod_{j=t}^{u-1} \prod_{l=1}^L \prod_{k=1}^{M_l} \exp \left(-\tau \hat{\eta}_l(t, j; k) \right)^{a_l(t; k)} \quad (2.7)$$

De forma equivalente, o preço de uma (t, u) -ZCB escreve-se, mais genericamente,

$$\begin{aligned} B(t, u) &= \frac{B(t-1, u)}{B(t-1, t)} \prod_{j=t}^{u-1} \prod_{l=1}^L \prod_{k=1}^{M_l} \exp \left(-\tau \hat{\eta}_l(t, j; k) \right)^{a_l(t; k)} \\ &= \frac{B(t-1, u)}{B(t-1, t)} \prod_{j=t}^{u-1} \prod_{l=1}^L \exp \left(-\tau \hat{\eta}_l(t, j; \omega_l(t)) \right). \end{aligned}$$

Sejam $t, u \in \mathbb{T}$ datas arbitrárias, tais que $t \leq u$, $l \in L$. Define-se

$$\eta_l(t, u) : \Omega_l^* \mapsto \mathbb{R}^+, \quad \omega_l(t) \mapsto \prod_{j=t}^{u-1} \exp \left(-\tau \hat{\eta}_l(t, j; \omega_l(t)) \right), \quad l \in \mathbb{L}$$

logo,

$$B(t, u) = \frac{B(t-1, u)}{B(t-1, t)} \prod_{l=1}^L \eta_l(t, u; \omega_l(t)).$$

Por recorrência, resulta

$$B(t, u) = \frac{B(s, u)}{B(s, t)} \prod_{i=s+1}^t \prod_{l=1}^L \prod_{j=t}^{u-1} \exp \left(-\tau \hat{\eta}_l(i, j; \omega(i)) \right) \\ \frac{B(s, u)}{B(s, t)} \prod_{i=s+1}^t \prod_{l=1}^L \frac{\eta_l(i, u; \omega_l(i))}{\eta_l(i, t; \omega_l(i))}.$$

A função $\hat{\eta}_l(t, u; \omega_l(t))$ surge como a perturbação que afeta a taxa de juro de curto prazo relativa ao período $[u, u + 1[$ mediante a realização do acontecimento $\omega(t)$ na data t . Por sua vez, o preço $B(t, u)$ da (t, u) -ZCB depende das perturbações reflectidas sobre todos os períodos desde a realização de um acontecimento até à maturidade do produto financeiro.

2.2 Considerações sobre as perturbações aleatórias

Apesar das expressões e relações já apresentadas, é fundamental definir restrições sobre as componentes estocásticas do modelo como garantia de que o mercado financeiro é livre de arbitragem.

Relembrando o Teorema 1.18, surge o seguinte corolário.

Corolário 2.2. Em cada data t , existe uma medida de probabilidade $\mathbb{Q}(t)$, com $t \leq u$, tal que

$$\sum_{\omega(t) \in \Omega^*} q(\omega(t)) \left(\prod_{l=1}^L \eta_l(t, u; \omega_l(t)) \right) = 1. \quad (2.8)$$

Demonstração. 1. (1) \Rightarrow (2):

Supondo que $\left(\tilde{B}(t, u) \right)_{t \in \mathbb{T}}$ é uma martingala relativamente à medida $\mathbb{Q}(t)$ condicionada pela história até à data t então, para qualquer $t < u$,

$$E_{\mathbb{Q}(t)} \left(\tilde{B}(t, u) \middle| \mathcal{F}(t-1) \right) = \tilde{B}(t-1, u).$$

Portanto,

$$E_{\mathbb{Q}(t)} \left(\tilde{B}(t, u) \middle| \mathcal{F}(t-1) \right) = E_{\mathbb{Q}(t)} \left(\tilde{B}(t-1, u) \left[\prod_{l=1}^L \eta_l(t, u; \omega_l(t)) \right] \right) \\ = \tilde{B}(t-1, u) E_{\mathbb{Q}(t)} \left(\prod_{l=1}^L \eta_l(t, u; \omega_l(t)) \right).$$

Da última expressão conclui-se que a seguinte condição é necessária,

$$E_{\mathbb{Q}(t)} \left(\prod_{l=1}^L \eta_l(t, u; \omega_l(t)) \right) = \sum_{\omega(t) \in \Omega^*} q(\omega(t)) \left(\prod_{l=1}^L \eta_l(t, u; \omega_l(t)) \right) = 1$$

2. (2) \Leftarrow (1):

Supondo que $(\tilde{B}(t, u))_{t \in \mathbb{T}}$ não é uma $\mathbb{Q}(t)$ -martingala. Existe uma data t^* tal que

$$\sum_{\omega(t^*) \in \Omega^*} q(\omega(t^*)) \left(\prod_{l=1}^L \eta_l(t^*, u; \omega_l(t^*)) \right) \neq 1,$$

o que contraria a hipótese (2.8). ■

Lema 2.3. Sejam $R(1), \dots, R(M)$ números reais tais que

$$R(1) \leq \dots \leq R(M) \quad \text{e} \quad R(1) < R(M).$$

Seja ρ um número real, então existe $q = (q(1), \dots, q(M)) \in \mathbb{R}^M$ tal que

$$(1) \text{ } q \text{ é estritamente positivo,} \quad (2) \sum_{k=1}^M q(k) = 1, \quad (3) \sum_{k=1}^M R(k)q(k) = \rho,$$

se e só se

$$\eta^*(t, U; a(1)) < \rho < \eta^*(t, U; a(M)).$$

Demonstração. Se existir tal medida de probabilidade então

$$R(1) = \sum_{k=1}^M R(1)q(k) < \sum_{k=1}^M R(k)q(k) = \rho < \sum_{k=1}^M R(M)q(k) = R(M).$$

No caso em que $M = 2$, $R(1) < R(2)$. Se $R(1) < \rho < R(2)$ então

$$q = \left(\frac{R(2) - \rho}{R(2) - R(1)}, \frac{\rho - R(1)}{R(2) - R(1)} \right)$$

é a única medida que satisfaz as condições requeridas. Suponha-se que $M > 2$ e, para um certo $1 < K < M$,

$$R(1), \dots, R(K) < \rho < R(K+1), \dots, R(M).$$

Defina-se

$$b = (b(1), b(2)) = \left(\frac{1}{K} \sum_{k=1}^K R(k), \frac{1}{M-K} \sum_{k=K+1}^M R(k) \right).$$

Então $b(1) < \rho < b(2)$, pelo caso $M = 2$, tem-se,

$$\lambda = (\lambda(1), \lambda(2)) = \left(\frac{b(2) - \rho}{b(2) - b(1)}, \frac{\rho - b(1)}{b(2) - b(1)} \right),$$

verifica as condições

$$\lambda > 0, \quad \lambda \cdot b = \rho, \quad \lambda(1) + \lambda(2) = 1.$$

Defina-se

$$q(j) = \begin{cases} \frac{\lambda(1)}{K}, & \text{se } j = 1, \dots, K \\ \frac{\lambda(2)}{M-K}, & \text{se } j = K+1, \dots, M, \end{cases}$$

então q satisfaz as condições requeridas no enunciado. ■

Teorema 2.4. As seguintes condições são equivalentes:

(i) O mercado financeiro de obrigações com zero cupões é livre de arbitragem.

(ii) A função $\eta^*(t, u) = \prod_{l=1}^L \eta_l(t, u)$ verifica as seguintes condições:

$$\eta^*(t, u; a(1)) < 1 < \eta^*(t, u; a(M)),$$

para uma data $t \in \mathbb{T}$ fixada e $u > t$.

Demonstração. Seja

$$\eta^*(t, u; \omega(t)) = \prod_{l=1}^L \eta_l(t, u; \omega_l(t)),$$

onde $\omega(t) \in \Omega_*$ e $\Omega_* = \{a(i) : 1 \leq i \leq M\}$.

A taxa de rentabilidade associada a uma (t, u) -ZCB é a variável aleatória,

$$r_u(t) = \frac{1}{B(t-1, t)} \eta^*(t, u; \omega(t)) - 1$$

e a taxa de rentabilidade de uma conta bancária de depósitos a prazo na data t é

$$r_X(t) = \frac{1}{B(t-1, t)} - 1.$$

Logo,

$$r_u(t) - r_X(t) = \frac{1}{B(t-1, t)} \left(\eta^*(t, u; \omega(t)) - 1 \right).$$

O mercado é livre de arbitragem se e só se para cada data $t \in \mathbb{T}$ e maturidade $u > t$ existir $q(t, \bar{\omega}(t-1)) \in \mathbb{R}^M$ tal que,

$$\sum_{j=1}^M q(t, \bar{\omega}(t-1), j) = 1 \quad \text{e} \quad q(t, j, \bar{\omega}(t-1)) > 0 \quad (1 \leq j \leq n),$$

$$B(t-1, t | \bar{\omega}(t-1)) \begin{bmatrix} r_{t+1}(t, a(1)) - r_X(t) & \dots & r_{t+1}(t, a(M)) - r_X(t) \\ \vdots & & \vdots \\ r_u(t, a(1)) - r_X(t) & \dots & r_u(t, a(M)) - r_X(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q(t, a(1), \bar{\omega}(t-1)) \\ \vdots \\ q(t, a(M), \bar{\omega}(t-1)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\iff \begin{bmatrix} \eta^*(t, t+1; a(1)) - 1 & \dots & \eta^*(t, t+1; a(M)) - 1 \\ \vdots & & \vdots \\ \eta^*(t, u; a(1)) - 1 & \dots & \eta^*(t, u; a(M)) - 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q(t, a(1), \bar{\omega}(t-1)) \\ \vdots \\ q(t, a(M), \bar{\omega}(t-1)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\iff \begin{bmatrix} \eta^*(t, t+1; a(1)) & \dots & \eta^*(t, t+1; a(M)) \\ \vdots & & \vdots \\ \eta^*(t, u; a(1)) & \dots & \eta^*(t, u; a(M)) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q(t, a(1), \bar{\omega}(t-1)) \\ \vdots \\ q(t, a(M), \bar{\omega}(t-1)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

Pelo Lema 2.3, este sistema tem solução $q(t) > 0$ que é uma distribuição de probabilidade se e só se,

$$\eta^*(t, u; a(1)) < 1 < \eta^*(t, u; a(M)), \quad u \in \mathbb{T}, \quad u \geq t.$$

■

Note-se que fixando $L = 2$ e $M_l = 2$ para todo l obtém-se o modelo de *HJM* em tempo discreto.

2.3 Modelo de Ho-Lee multinomial

Um caso particular do modelo apresentado é o modelo de Ho-Lee multinomial [1]. Trata-se do caso em que $L = 1$, a medida $\mathbb{P}^*(t) = \mathbb{P}^*$ não depende da data t e supõe-se que a repercussão de um acontecimento é, independentemente da data de ocorrência, a mesma sobre todos os intervalos de tempo futuros. Por outras palavras, considera-se que $\hat{\eta}(t, j; \omega(t))$ é constante no intervalo $]t, u]$, ou seja

$$\eta(t, u; \omega(t)) = \exp \left(-\tau \hat{\eta}(t, u; \omega(t)) \right)^{u-t}. \quad (2.9)$$

Nota 2.5. Se, além das restrições agora impostas sobre L e a medida \mathbb{P} , se tiver $M = 2$ obtém-se o modelo de *Ho-Lee* original [16].

Assim, a função $\eta(t, u)$ depende essencialmente da maturidade residual, $u - t$. Ou seja, para cada maturidade residual, $z \in \mathbb{T}$, existem funções associadas ao conjunto Ω^* ,

$$\eta(z) : \Omega^* \rightarrow \mathbb{R}^+, \quad \omega(t) \rightarrow \eta(z; \omega),$$

tais que

- (i) $\eta(0; \omega(t)) = 1, \quad \omega(t) \in \Omega^*$;
- (ii) $\eta(z; a(1)) \leq \dots \leq \eta(z; a(M))$;
- (iii) $\eta(z; a(1)) < \eta(z; a(M))$.

Fixada a data u , o processo de preços $(B(t, u))_{t \in \mathbb{T}}, t \leq u$, é definido pela lei de evolução

$$B(t, u) = \frac{B(t-1, u)}{B(t-1, t)} \eta(u-t) \quad t, u \in \mathbb{T}, t \leq u. \quad (2.10)$$

Relembre-se que a data actual é $s \in \mathbb{T}$ tal que $s \leq t \leq u$. A condição (iii) sobre a função η implica que as condições sobre a lei de evolução dos preços aqui referidas sejam compatíveis.

Note-se que na data t o preço da $(t, u) - ZCB$ é o produto do fator determinístico $\frac{B(t-1, u)}{B(t-1, t)}$ pelo factor estocástico $\eta(z, j)$ que depende da maturidade residual, $z = u - t$, e da realização do acontecimento $a(j) \in \Omega^*$ na data t . Por recorrência obtém-se a seguinte expressão que é equivalente a (2.10),

$$B(t, u) = \frac{B(s, u)}{B(s, t)} \prod_{k=s+1}^t \frac{\eta(u - k; \omega(k))}{\eta(t - k; \omega(k))}, \quad (2.11)$$

conhecida a σ -álgebra $\mathcal{F}(s)$.

Sejam,

- $B(t, u | j, \mathcal{F}(t-1))$, o preço da $(t, u) - ZCB$ na data t condicionado pela σ -álgebra $\mathcal{F}(t-1)$ e pela realização do acontecimento $a(j)$ na data t .
- $B(t, u | k, j, \mathcal{F}(t-2))$, o preço da $(t, u) - ZCB$ na data t condicionado pela σ -álgebra $\mathcal{F}(t-2)$ e pela realização dos acontecimentos $a(j)$, na data $t-1$, e $a(k)$ na data t .

Definição 2.6. O j -ésimo parâmetro de volatilidade, λ_j , é definido por

$$\lambda_j = \frac{B(t, t+1 | j, \mathcal{F}(t-1))}{B(t, t+1 | M, \mathcal{F}(t-1))} = \frac{\eta(1, j)}{\eta(1, M)}, \quad j \in \mathbb{M}, \quad \lambda_M = 1.$$

Os parâmetros $(\lambda_j)_{j \in \mathbb{M}}$, podem ser vistos como perturbações associadas a uma realização do acontecimento $a(j)$ relativamente à perturbação $\eta(1, M)$ de maior magnitude.

Teorema 2.7. As seguintes condições são equivalentes:

- (i) O mercado financeiro de obrigações com zero cupões é livre de arbitragem.
- (ii) $\forall z \in \mathbb{T}, \quad \eta(z; a(1)) < 1 < \eta(z; a(M))$.

A demonstração do Teorema 2.7 é em tudo idêntica à do Teorema 2.4. Note-se que o vetor q , introduzido na demonstração, pode ser escolhido independentemente de t e de $\bar{\omega}(t-1)$ porque q tem de verificar a igualdade $\sum_{k=1}^M \eta(z, a(k))q(k) = 1$ e a matriz do sistema só depende de t e de $\bar{\omega}(t-1)$ através do factor multiplicativo $B(t-1, t|\bar{\omega})^{-1}$.

Da demonstração do Teorema 2.4 resulta, tendo em conta os pressupostos desta secção, o seguinte corolário.

Corolário 2.8. As seguintes condições são equivalentes:

- (i) O mercado é livre de arbitragem.
- (ii) Existe $q = (q(j))_{j \in \mathbb{M}} \in \mathbb{R}^M$, independente da data e da maturidade residual, tal que

$$\forall z \in \mathbb{T}, \quad \sum_{j=1}^M \eta(z, j)q(j) = 1, \quad \forall j \in \mathbb{M}, \quad q(j) > 0, \quad \sum_{j=1}^M q(j) = 1.$$

Daqui em diante far-se-á a hipótese de o mercado de obrigações com zero cupões ser livre de arbitragem e que \mathbb{Q} é uma medida martingala para o processo dos preços descontados $\left(\tilde{B}(t, u)\right)_{t \in \mathbb{T}}$, $t \leq u$ que é \mathbb{P} -equivalente e determinada por q .

Proposição 2.9. As seguintes condições são equivalentes:

- (i) $B(t, u | k, j, \mathcal{F}(t-1)) = B(t, u | j, k, \mathcal{F}(t-1))$, $k, j \in \mathbb{M}$, $t \in \mathbb{T}$, $t \leq u$.
- (ii) $\bar{\eta}(z, j) = \lambda_j \bar{\eta}(z-1, j)$, $j \in \mathbb{M}$, $z \in \mathbb{T}$,
onde $\bar{\eta}(z, j) = \frac{\eta(z, j)}{\eta(z, M)}$.

Neste caso diz-se que a árvore de acontecimentos $\mathbb{E}(\mathbb{F})$ é **recombinável**.

Demonstração.

$$\begin{aligned} B(t, u | k, j, \mathcal{F}(t-1)) &= \frac{B(t, u | j, \mathcal{F}(t-1))}{B(t-1, t | j, \mathcal{F}(t-1))} \eta(u - (t+1), k) \\ &= \frac{B(t, u)}{B(t-1, t)} \eta(u-t, j) \eta(u - (t+1), k) \frac{B(t-1, t)}{B(t-1, t+1) \eta(1, j)} \\ &= \frac{B(t-1, u)}{B(t-1, t+1)} \frac{\eta(u-t, j)}{\eta(1, j)} \eta(u - (t+1), k). \end{aligned}$$

De forma análoga obtém-se

$$B(t, u | j, k, \mathcal{F}(t-1)) = \frac{B(t-1, u)}{B(t-1, t+1)} \frac{\eta(u-t, k)}{\eta(1, k)} \eta(u - (t+1), j).$$

Logo $B(t, u | j, k, \mathcal{F}(t-1)) = B(t, u | k, j, \mathcal{F}(t-1))$ se e só se,

$$\frac{\eta(z, j)}{\eta(z, k)} = \frac{\eta(1, j)}{\eta(1, k)} \frac{\eta(z-1, j)}{\eta(z-1, k)}$$

ou seja,

$$\frac{\eta(z, j)}{\eta(z, k)} = \frac{\lambda_j}{\lambda_k} \frac{\eta(z-1, j)}{\eta(z-1, k)}.$$

Tomando $k = M$ vem

$$\frac{\eta(z, j)}{\eta(z, M)} = \lambda_j \frac{\eta(z-1, j)}{\eta(z-1, M)}.$$

Por outro lado, se esta relação for satisfeita tem-se

$$\frac{\eta(z, j)}{\eta(z, k)} = \frac{\eta(z, M) \eta(z, j)}{\eta(z, M) \eta(z, k)} = \lambda_j \frac{\eta(z-1, M)}{\eta(z-1, k)} \frac{\eta(z-1, j)}{\lambda_k \eta(z-1, M)} = \frac{\lambda_j}{\lambda_k} \frac{\eta(z-1, j)}{\eta(z-1, k)}$$

■

Note-se que $\bar{\eta}(z, j) = \lambda_j^z$, por indução sobre z . Mais, há uma relação dos parâmetros de volatilidade com a expressão (2.9),

$$\eta(z; \omega(t)) = \exp\left(-\tau \hat{\eta}(t, u; \omega(t))\right)^z = \lambda_{\omega(t)}^z \eta(z; M),$$

de forma equivalente,

$$\frac{\eta(z; j)}{\eta(z; M)} = \frac{\exp\left(-z\tau\hat{\eta}(t, u; j)\right)}{\exp\left(-z\tau\hat{\eta}(t, u; M)\right)} = \lambda_j^z, \quad j \in \mathbb{M}.$$

Daqui em diante far-se-á a hipótese de que a árvore de acontecimentos é recombinação.

Proposição 2.10. As perturbações $\eta(z, a(k))$ podem ser escritas em termos dos coeficientes de volatilidade e da medida martingala \mathbb{Q} determinada por q do seguinte modo:

$$\eta(z, a(k)) = \frac{\lambda_k^z}{\sum_{j=1}^M \lambda_j^z q(j)}, \quad k \in \mathbb{M}.$$

Demonstração. Por indução sobre z tem-se, usando o que foi referido na prova de (2.9),

$$\frac{\eta(z, a(j))}{\eta(z, a(k))} = \left(\frac{\lambda_j}{\lambda_k}\right).$$

Por outro lado a condição de não arbitragem implica que $\sum_{j=1}^M \eta(z, a(j))q(j) = 1$.

Logo, $\sum_{j=1}^M \frac{\eta(z, a(j))}{\eta(z, a(k))q(j)} = \frac{1}{\eta(z, a(k))}$ e portanto $\sum_{j=1}^M \frac{\lambda_j}{\lambda_k} q(j) = \frac{1}{\eta(z, a(k))}$.

Obtém-se finalmente, $\eta(z, a(k)) = \frac{\lambda_k^z}{\sum_{j=1}^M \lambda_j^z q(j)}$ ■

No que se segue $\bar{\omega}(t) \in \bar{\Omega}(t)$. Sejam $\gamma_j = |\{i \in \mathbb{T} : i \leq t, \omega(i) = a(j)\}|$ o número de vezes que nas datas $i \leq t$ se realizou $a(j) \in \Omega_*$, $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_M) \in \mathbb{N}_0^M$, e $|\gamma| = t$. E seja $\gamma[k] = (\gamma_1, \dots, \gamma_{k-1}, \gamma_k + 1, \dots, \gamma_{k+1}, \dots, \gamma_M)$, $k \in \mathbb{M}$, portanto $|\gamma[k]| = t + 1$ e $\bar{\omega}(t, \gamma[k]) \in \bar{\Omega}(t + 1)$.

Proposição 2.11. Considerem-se as datas $s, t, u \in \mathbb{T}$, tais que $s \leq t \leq u$, e $\bar{\omega}(t) \in \bar{\Omega}(t)$.

Seja $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_M)$.

Então

$$B(t, u) \Big|_{\bar{\omega}(t)} = \frac{B(s, u)}{B(s, t)} \lambda^{\gamma(u-t)} \left(\prod_{k=s+1}^t \frac{\sum_{j=1}^M \lambda_j^{t-k} q(j)}{\sum_{j=1}^M \lambda_j^{u-k} q(j)} \right). \quad (2.12)$$

Note-se que a expressão (2.12) dá os preços das (t, u) – ZCB em função da medida martingala \mathbb{Q} e dos preços dessa ZCB na data s .

Demonstração.

$$\begin{aligned} B(t, u) \Big|_{\bar{\omega}(t)} &= \frac{B(s, u)}{B(s, t)} \frac{\prod_{k=s+1}^t \eta(u-k, \omega(k))}{\prod_{k=s+1}^{t-1} \eta(t-k, \omega(k))} \\ &= \prod_{k=s+1}^t \frac{\lambda_{\omega(k)}^{u-k}}{\sum_{j=1}^M \lambda_j^{u-k} q(j)} \prod_{k=s+1}^{t-1} \frac{\sum_{j=1}^M \lambda_j^{t-k} q(j)}{\lambda_{\omega(k)}^{t-k}} \\ &= \frac{B(s, U)}{B(s, t)} \lambda^{\gamma(u-t)} \left(\prod_{k=s+1}^t \frac{\sum_{j=1}^M \lambda_j^{t-k} q(j)}{\sum_{j=1}^M \lambda_j^{u-k} q(j)} \right). \end{aligned}$$
■

Proposição 2.12. Seja $F : \mathbb{R}^{u-t} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função \mathbb{Q} -integrável, tal que

$$F \left((B(t, v))_{t < v \leq u} \right)$$

é a dívida contingente associada a um derivado financeiro H .

Para $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_M)$ faz-se $|\gamma| = \sum_{i=1}^M \gamma_i$.

Se $|\gamma| = K \in \mathbb{N}$ define-se, $\binom{K}{\gamma} = \frac{K!}{\gamma_1! \dots \gamma_M!}$.

O preço livre de arbitragem associado a \mathbb{Q} é

$$\begin{aligned} \pi_{\mathbb{Q}}(s, H) &= E_{\mathbb{Q}} \left(\frac{1}{X(t)} F \left((B(t, v, \bar{\omega}(t, \gamma)))_{t < v \leq u} \right) \right) \\ &= \sum_{k=1}^M \sum_{\gamma \in \mathbb{R}^M : |\gamma| = t-1-s} \binom{t-1}{\gamma} q^{\gamma[k]} \frac{1}{X(t, \bar{\omega}(t-1, \gamma))} F \left((B(t, v, \bar{\omega}(t, \gamma)))_{t < v \leq u} \right) \\ &= \mathbb{Q}(\bar{\omega}(t)) \end{aligned}$$

Capítulo 3

Modelos de volatilidade

3.1 Volatilidade implícita e volatilidade local

Em 1900, Bachelier propôs um modelo para descrever o comportamento dos preços de produtos económicos¹ através de um processo de difusão estocástica normal governado pela equação diferencial estocástica

$$dS(t) = S(t)(r - q) + \sigma dW, \quad (3.1)$$

onde t é o tempo, W é um processo de Wiener sob uma medida martingala \mathbb{P} -equivalente \mathbb{Q} , $S(t)$ é o preço na data t do produto, r é uma constante que representa a taxa de juro livre de risco, q é uma constante que representa os dividendos por preço unitário e, no processo de difusão estocástica $\sigma dW(t)$, a constante σ é designada por *volatilidade do preço* $S(t)$. Considere-se uma opção europeia cujas datas de início e de exercício são, respetivamente, s e t , o preço de exercício é y e $F(t)$ é o *preço futuro*² do ativo subjacente com data de pagamento numa data $t + \tau$ maior que t . Adaptando-se o modelo (3.1) ao caso em que o preço do instrumento financeiro é um preço forward, deriva-se o preço da opção europeia pelo modelo de Bachelier,

$$\pi^N(s, t, F, y, B, \sigma, \kappa) = B(s, t + \tau) \tau \mathbf{Bach}(s, t, F, y, B, \sigma, \kappa), \quad (3.2)$$

sendo

$$\mathbf{Bach}(s, t, F, y, B, \sigma, \kappa) = \left[\sigma \sqrt{t - s} (d_\kappa \Phi(d_\kappa) + \phi(d_\kappa)) \right]. \quad (3.3)$$

¹commodities.

²ou, *forward*.

³aplica-se, por exemplo, quando o ativo subjacente é uma taxa de juro simples com início na data t e data de pagamento na data $t + \tau$.

Nesta fórmula

$$d_\kappa = \kappa \frac{F(t) - y}{\sigma \sqrt{t - s}} \quad , \quad \Phi(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx \quad \text{e} \quad \phi = \frac{d\Phi}{dx}.$$

são, respectivamente, as funções de distribuição e densidade da distribuição normal de centro 0 e variância 1.

Se $\kappa = 1$ a opção é um caplet e se $\kappa = -1$ a opção é um floorlet.

Em 1973, Fischer Black e Myron Scholes publicaram o desde então famoso modelo de Black-Scholes [5] descrito pela equação diferencial estocástica

$$dS(t) = S(t) (r(t) - q(t)) dt + \sigma S(t) dW(t) \quad (3.4)$$

onde t é o tempo, W é um processo de Wiener sob uma medida martingala \mathbb{P} -equivalente \mathbb{Q} , $S(t)$ é o preço na data t do ativo subjacente ao derivado financeiro, $r : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ é uma função contínua que representa o processo da taxa de juro livre de risco e $q : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ é uma função contínua que representa o processo dos dividendos e, no processo de difusão estocástica $\sigma S(t) dW(t)$, a constante σ é designada por *volatilidade de Black*.

Considere-se uma opção europeia cujas datas de início e maturidade são, respetivamente, s e t , o preço de exercício é y e $F(t)$ é o preço futuro do ativo subjacente com data de pagamento na data $t + \tau$.

O preço da opção europeia que deriva do modelo de Black-Scholes (3.4) é,

$$\pi^{BS}(s, t, F, y, B, \sigma, \kappa) = B(s, t + \tau) \tau \mathbf{Black}(s, t, F, y, B, \sigma, \kappa), \quad (3.5)$$

sendo

$$\mathbf{Black}(s, t, F(t), y, \sigma, \kappa) = \kappa [F(t) \Phi(\kappa d_{\kappa=1}) - y \Phi(\kappa d_{\kappa=-1})],$$

onde

$$d_\kappa = \frac{\log\left(\frac{F(t)}{y}\right) + \kappa \frac{1}{2} \sigma^2 (t - s)}{\sigma \sqrt{t - s}}.$$

Se $\kappa = 1$ a opção é de compra, se $\kappa = -1$ a opção é de venda. A

Desde a publicação do modelo de Black-Scholes, e certamente que também como resultado da simplicidade das fórmulas para os preços que dele resultam para os derivados financeiros mais usuais, o modelo de Black-Scholes tornou-se num dos instrumentos mais usados e um dos modelos comparativos de referência para o cálculo do preço de derivados financeiros. Note-se que uma das hipóteses dos modelos de Bachelier e de Black-Scholes é que σ , a volatilidade anualizada do processo estocástico, é constante ao longo do período de vida do derivado financeiro (como seja uma opção ou um contrato de swap) e independente do próprio processo S . Contudo os dados de mercado e avaliações de preços de

derivados financeiros, que se revelaram aparentemente erradas e poderão ter conduzido a algumas crises económico/financeiras nos anos 80 do século XX, puseram em questão a independência dessa volatilidade relativamente ao tempo e ao próprio processo de preços. Note-se que os preços π^N (3.2) e π^{BS} (3.5) são funções de $(s, t, F, y, \nu, \sigma, \kappa)$. Como cada uma destas funções é estritamente monótona na variável σ , uma vez conhecido o vetor $(\pi^{mkt}, s, t, F, y, \nu, \kappa)$, resolvendo-se a equação

$$\pi^{mkt}(s, t, F, y, \kappa) - \pi^N(s, t, F, y, B, \sigma, \kappa) = 0$$

em ordem a σ , determina-se univocamente a chamada *volatilidade implícita normal* σ^N do preço $F - y$. E, resolvendo-se a equação

$$\pi^{mkt}(s, t, F, y, \kappa) - \pi^{BS}(s, t, F, y, B, \sigma, \kappa) = 0, \quad (3.6)$$

em ordem a σ , determina-se univocamente a chamada *volatilidade implícita lognormal* σ^{BS} , também designada na literatura *volatilidade implícita de Black* do retorno $\log\left(\frac{F}{y}\right)$. Usando dados de mercado $(\pi^{mkt}, s, t, F, y, \nu, \kappa)$ constatou-se que, quer o modelo de Bachelier, quer o modelo de Black-Scholes, são insuficientes para descrever a dinâmica dos preços dos produtos financeiros, na medida em que nenhuma das volatilidades (implícitas) σ^N e σ^{BS} , que se obtêm resolvendo a equações (3.2) e (3.5) em ordem a σ^N e σ^{BS} , é constante. Mais precisamente, no mercado, fixados s e F constata-se que σ^N e σ^{BS} são funções dependentes quer do preço de exercício, y , quer da maturidade residual do derivado, $t - s$. Ao gráfico da função $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, (y, t) \mapsto \sigma^N(y, t - s)$ chama-se a *superfície de volatilidade normal* (Figura 3.1) do preço F na data s . E, ao gráfico da função $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, (y, t) \mapsto \sigma^{BS}(y, t - s)$ chama-se a *superfície de volatilidade lognormal* (Figura 3.2) do preço F na data s .

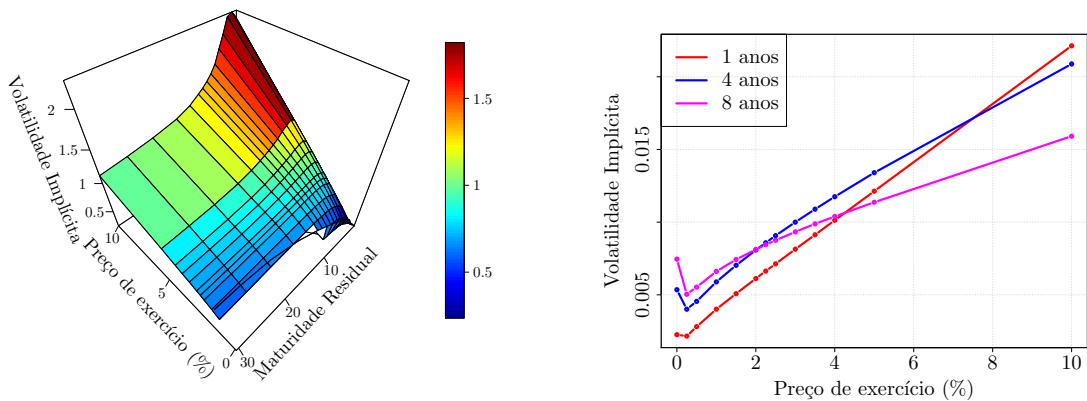


Figura 3.1: Volatilidade normal de caps de mercado em 04-04-2014.

Surgiu assim a necessidade de encontrar modelos alternativos aos modelos de Bachelier e de Black-Scholes de modo a ter em conta esta dependência do preço do derivado financeiro

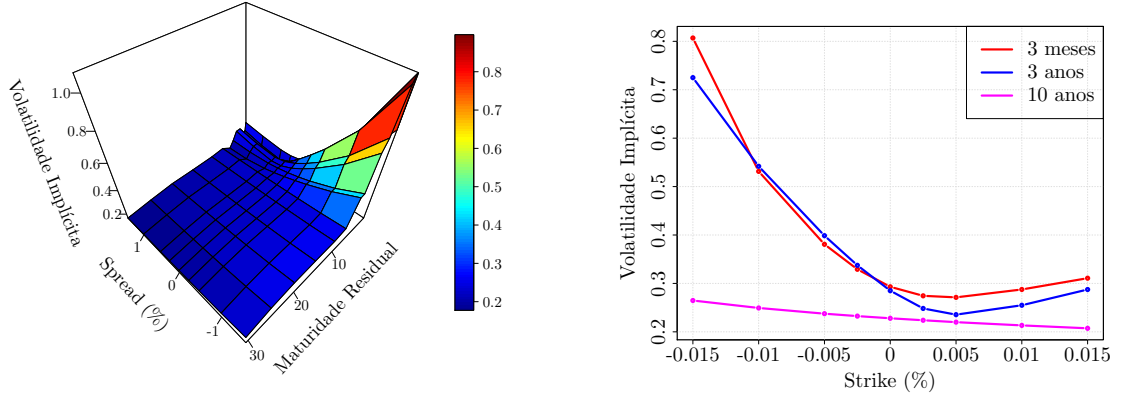


Figura 3.2: Volatilidade lognormal de mercado swaptions de tenor 10 anos em 17-03-2014.

relativamente ao seu preço de exercício e à sua maturidade.

Uma das primeiras alternativas para as limitações encontradas no modelo de Black-Scholes foi o *modelo lognormal de Black*[4] publicado em 1976. Este modelo é uma adaptação de (3.4) ao caso em que se descreve o processo dos preços futuros F de um ativo financeiro por um processo de difusão estocástica lognormal porém admitindo que a volatilidade determinística $\sigma(t-s)$ depende da maturidade residual $t-s$ do instrumento financeiro. Este modelo é definido pela equação diferencial estocástica

$$dF(t) = (r(t) - q(t)) dt + \sigma(t-s)F(t)dW(t), \quad (3.7)$$

onde $\sigma(t-s)$ é a volatilidade lognormal instantânea.

Sendo s a data de contratação de uma opção europeia, t a sua data de exercício, y o preço de exercício, $F(t)$ o preço futuro na data t e, o seu preço π^B que deriva do modelo (3.7) é calculado pela fórmula de Black (3.5):

$$\pi^B(s, t, F, y, B, \sigma^B, \kappa) = B(s, t + \tau)\tau \mathbf{Black}(s, t, F, y, B, \sigma^B, \kappa). \quad (3.8)$$

onde $\sigma^B = \sigma^B(t-s)$ é a chamada *volatilidade de Black* dada por

$$\sigma^B(t-s) = \sqrt{\frac{1}{t-s} \int_s^t \sigma(u)^2 du}.$$

Mais tarde e porque se continuava a constatar que a volatilidade de preços de derivados com o mesmo ativo subjacente e a mesma maturidade residual dependem do preço de exercício começaram a ser desenvolvidos os chamados modelos de volatilidade local descritos por uma equação diferencial estocástica da forma

$$\begin{aligned} dS(t) &= \mu(t)S(t)dt + \sigma_L(S, t)S(t)dW(t) \\ &= (r(t) - q(t))S(t)dt + \sigma_L(S, t)S(t)dW(t), \end{aligned}$$

onde a volatilidade σ_L , passa a ser uma função do preço e do tempo

$$\sigma_L : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}_+^*, (S, t) \mapsto \sigma(S, t).$$

Associado ao processo estocástico r das taxas de juro livres de risco, tem-se o processo estocástico dos factores de desconto

$$B(s, t) = \exp \left(- \int_s^t f(s, u) du \right).$$

Seja $p(S, t)$ a função densidade de probabilidade do preço $S(t)$ na data t do ativo subjacente a uma opção europeia de compra.

Então p é solução da equação às derivadas parciais de Fokker-Planck

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -(r(t) - q(t)) \frac{\partial}{\partial S} (S(t)p(S(t), t)) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial S^2} (\sigma_L^2(s, u) S^2(t) p(S(t), t)) \quad (3.9)$$

O preço $\pi(s, H_E(\kappa = 1))$ de uma opção europeia de compra na data s escreve-se

$$\begin{aligned} \pi(s, t, S(t), y, \kappa = 1) &= B(s, t) E_{\mathbb{Q}(s)} \left((S(t) - y)^+ \right) \\ &= B(s, t) \int_y^{+\infty} (S(t) - y) p(S, t) dS \end{aligned} \quad (3.10)$$

Tendo em conta (3.10) e as fórmulas de *Breeden* e *Litzenberger* (1.15), (1.16), e a equação de Fokker-Planck (3.9) vem

$$\begin{aligned} \frac{\partial \pi}{\partial t} + r(t)\pi &= B(s, t) \int_y^\infty (S(t) - y) \frac{\partial p(S(t), t)}{\partial t} dS \\ &= B(s, t) \int_y^{+\infty} (S(t) - y) \left[\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial S^2} (\sigma_L^2(S(t), t) S^2(t) p(S(t), t)) \right. \\ &\quad \left. - (r(t) - q(t)) \frac{\partial}{\partial S} (S(t)p(S(t), t)) \right] dS \end{aligned} \quad (3.11)$$

Admitindo que $p(S, t)$ tem um decaimento rápido quando S tende para $+\infty$ pode-se integrar por partes o segundo membro de (3.11) e concluir que

$$\begin{aligned} \frac{\partial \pi}{\partial t} + r(t)\pi &= -(r(t) - q(t)) B(s, t) \int_y^{+\infty} S p(S, t) dS - \frac{1}{2} B(s, t) \sigma_L^2(S, t) S^2 p(S, t) \Big|_{S=y}^{S=+\infty} \\ &= \frac{1}{2} \sigma_L^2(y, t) y^2 \frac{\partial^2 \pi}{\partial y^2} + (r(t) - q(t)) \left(\pi + y B(s, t) \int_y^{+\infty} p(S, t) dS \right) \end{aligned} \quad (3.12)$$

Daqui resulta que a volatilidade local $\sigma_L(y, t)$ se pode exprimir pela designada *fórmula de Dupire* [8]

$$\sigma_L^2(y, t) = 2 \frac{\frac{\partial \pi}{\partial t} + (r(t) - q(t)) y \frac{\partial \pi}{\partial y} + q(t) \pi}{y^2 \frac{\partial^2 \pi}{\partial y^2}}, \quad (3.13)$$

demonstrada como acima por Derman e Kani [7].

Conhecido o preço *forward* F na data s , seja $\sigma^{BS} = \sigma^{BS}(y, t)$ a volatilidade implícita de Black associada ao preço π^{BS} de uma opção europeia com preço de exercício y na data de exercício t , ou seja, a solução σ^{BS} que se obtém resolvendo a equação (3.6) em ordem a σ .

Vai-se agora exprimir a volatilidade local $\sigma_L(y, t)$ em função da volatilidade implícita $\sigma^B(y, t)$ seguindo para o efeito a exposição de Gatheral [10].

Sejam $\theta = t - s$ a maturidade residual da opção europeia, $\sigma^B := \sigma^B(t)$ a volatilidade de Black, $w = \theta(\sigma^B)^2$ e $z = \log(y/F(t))$ o preço de exercício logaritmicado, onde $F(t) = F(s) \exp(\int_s^t \mu(t) dt)$ é o preço *forward* do ativo financeiro na data t , calculado na data s .

Usando estas variáveis, o preço da opção europeia de compra usando a fórmula de Black exprime-se através da fórmula

$$\pi = F(t) \left[\Phi \left(-\frac{z}{\sqrt{w}} + \frac{\sqrt{w}}{2} \right) - e^z \Phi \left(-\frac{z}{\sqrt{w}} - \frac{\sqrt{w}}{2} \right) \right]. \quad (3.14)$$

Substituindo na fórmula de Dupire (3.13) as seguintes derivadas parciais do preço da opção europeia expresso nas variáveis z e w :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \pi}{\partial y} &= \frac{1}{y} \frac{\partial \pi}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial \pi}{\partial w} \\ \frac{\partial^2 \pi}{\partial y^2} &= \frac{1}{y^2} \left(\frac{\partial^2 \pi}{\partial z^2} - \frac{\partial \pi}{\partial z} \right) + \frac{2}{y} \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial^2 \pi}{\partial w \partial z} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \frac{\partial \pi}{\partial w} + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \frac{\partial^2 \pi}{\partial w^2} \\ \frac{\partial \pi}{\partial t} &= -q(t)\pi + (q(t) - r(t)) \frac{\partial \pi}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial t} \frac{\partial \pi}{\partial w}, \end{aligned}$$

obtém-se uma fórmula para a volatilidade local que após alguns cálculos fastidiosos usando as seguintes relações

$$\frac{\partial^2 \pi}{\partial w^2} = \left(-\frac{1}{8} - \frac{1}{2w} + \frac{z^2}{2w} \right) \frac{\partial \pi}{\partial w} \quad (3.15)$$

$$\frac{\partial^2 \pi}{\partial w \partial z} = \left(\frac{1}{2} - \frac{z}{w} \right) \frac{\partial \pi}{\partial w} \quad (3.16)$$

$$\frac{\partial^2 \pi}{\partial z^2} - \frac{\partial \pi}{\partial z} = 2 \frac{\partial \pi}{\partial w} \quad (3.17)$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = 2\theta \sigma^B \frac{\partial \sigma^B}{\partial y} \quad (3.18)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 2\theta \sigma^B \left(\frac{\partial \sigma^B}{\partial y} \right)^2 + 2\theta \sigma^B \frac{\partial^2 \sigma^B}{\partial y^2} \quad (3.19)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = (\sigma^B)^2 + 2\theta \sigma^B \frac{\partial \sigma^B}{\partial t}, \quad (3.20)$$

pode ser simplificada chegando-se finalmente à fórmula procurada:

$$\sigma_L^2(y, t) = \frac{\sigma_B^2 + 2\theta \sigma^B \left(\frac{\partial \sigma^B}{\partial t} + (r(t) - q(t))y \frac{\partial \sigma^B}{\partial y} \right)}{\left(1 - \frac{yz}{\sigma^B} \frac{\partial \sigma^B}{\partial y} \right)^2 + \theta y \sigma^B \left(\frac{\partial \sigma^B}{\partial y} - \frac{1}{4} \theta y \sigma^B \left(\frac{\partial \sigma^B}{\partial y} \right)^2 + y \frac{\partial^2 \sigma^B}{\partial y^2} \right)} \quad (3.21)$$

Com esta fórmula obtém-se a superfície de volatilidade nos modelos de volatilidade local.

Citando Rebonato [24]:

Once we recognize that the assumptions of the Black-and-Scholes world are so strongly violated that we have to introduce a strike dependence on the implied volatility, the latter quantity simply becomes the wrong number to put in the wrong formula to get the right price of plain-vanilla options.

Pelo primeiro teorema fundamental dos preços de um produto financeiro, todo o preço futuro descontado pelo numerário, é uma martingala para uma medida \mathbb{Q} neutral ao risco. Por um teorema de Dambis-Dubins-Schwarz [26] toda a \mathbb{Q} -martingala contínua evolui como um movimento Browniano com tempo modificado

$$M(t) = \widehat{W}_{\tau(t)},$$

onde o processo $\tau(t)$ de mudança de tempo é o processo de variação quadrática

$$\tau(t) = \int_0^t \sigma^2(u) du = \sum_{\Delta \rightarrow +0} \sum_{n=0}^{\lfloor t/\Delta \rfloor} (M(n\Delta) - M((n-1)\Delta))^2.$$

Este resultado leva a que se possa interpretar a variância integrada como um *relógio estocástico* cuja velocidade é determinada pela actividade do mercado.

No modelo de Black e nos modelos de volatilidade local a volatilidade $\sigma(S, t)$ é função determinística do tempo t e eventualmente do preço S na data t . Nos modelos de volatilidade estocástica, a função σ é ela própria um processo estocástico dependente da evolução do preço S e do tempo t e do espaço de probabilidade filtrado no qual o processo de preços está definido.

Outra alternativa aos modelos de Bachelier e de Black-Scholes são os modelos de volatilidade estocástica, em que a própria volatilidade é um processo governado por uma equação diferencial estocástica. O capítulo 4 desta tese é dedicado à descrição das propriedades, de métodos de calibração, e do cálculo da distribuição de probabilidade do preço $F(t)$ de um produto financeiro cuja dinâmica é descrita pelo modelo SABR [13] de volatilidade estocástica.

Considere-se uma opção europeia cujas datas de início e maturidade são, respetivamente, s e t , o preço de exercício é y e $F(t)$ é o *preço futuro* do ativo subjacente com maturidade na data $t + \tau$.

O modelo SABR é descrito pelo sistema de equações diferenciais estocásticas

$$\begin{cases} dF(t) = \alpha(t)(F(t) + \mu)^\beta dW_F(t), & F(0) = F_0, \\ d\alpha(t) = \nu\alpha(t)dW_\alpha(t), & \alpha(0) = \alpha_0, \end{cases} \quad (3.22)$$

onde F é o processo dos preços futuros do ativo financeiro e α é o processo da volatilidade de F , os valores F_0 e α_0 são as condições iniciais do sistema (3.22). O parâmetro $\beta \in [0, 1]$ é o coeficiente de elasticidade, ν é o parâmetro da volatilidade do processo da volatilidade, α , e, μ é a translação aplicada ao processo F . W_F e W_α são processos de Wiener afetos a F e α respetivamente, cuja correlação é caracterizada pelo parâmetro ρ , isto é,

$$E(dW_F.dW_\alpha) = \rho dt.$$

3.2 Stripping/Desmantelamento da volatilidade

Considere-se um cap sobre o processo de taxas de juro simples F contratado na data s , com início na data t_m , que tem como última data de pagamento t_n , preço de exercício y e, seja $\nu(s, -)$ uma função de desconto. Como foi referido na secção 1.5.3 o preço deste cap é a soma de preços de caplets,

$$\mathbf{Cap}(t_m, t_n, F, y|\mathcal{F}(s)) = \sum_{k=m+1}^n \tau_k \nu(s, t_k) \mathbf{Caplet}(t_k, t_{k+1}, F_k(t_{k-1}), y|\mathcal{F}(s)). \quad (3.23)$$

Seja \mathbf{Cap}^{BS} o preço do cap calculado utilizando a fórmula de Black (omite-se $\kappa = 1$),

$$\mathbf{Cap}^{BS}(t_m, t_n, F, y|\mathcal{F}(s)) = \sum_{k=m+1}^n \tau_k \nu(s, t_k) \mathbf{Black}(t_k, t_{k+1}, F_k(t_{k-1}), y, \sigma^{BS}(y, t_k, t_{k+1})), \quad (3.24)$$

onde $\sigma^{BS}(y, t_k, t_{k+1})$ é a volatilidade a prazo na data t_k para a maturidade t_{k+1} condicional à σ -álgebra $\mathcal{F}(s)$.

Há porém uma dificuldade de ordem prática no cálculo do preço do cap por (3.24), na medida em que as volatilidades dos caplets $\sigma^{BS}(y, t_k, t_{k+1})$ não estão cotadas no mercado, sendo que os dados disponíveis são as chamadas volatilidades *flat* dos caps. A volatilidade de mercado $\sigma_{cap}^{mkt}(y, t_m, t_n)$ de um cap com início na data t_m e cuja última data de pagamento é t_n é a volatilidade de Black σ que se obtém conhecido o preço de mercado \mathbf{Cap}^{mkt} do cap e tal que,

$$\mathbf{Cap}^{mkt}(t_m, t_n, F, y|\mathcal{F}(s)) = \sum_{k=m+1}^n \tau_k \nu(s, t_k) \mathbf{Black}(t_k, t_{k+1}, F_k(t_{k-1}), y, \sigma, \kappa = 1), \quad (3.25)$$

Refira-se que o preço \mathbf{Cap}^{mkt} não consta dos dados de mercado que se conseguiu recolher. Torna-se assim necessário calcular o preço dos caps como função dos preços de exercício y e da volatilidade σ_{cap}^{mkt} que vem do mercado usando a fórmula (3.25). Nesta secção introduz-se uma técnica de desmantelamento da volatilidade também designada por *stripping* da volatilidade dos caps como descrito em [11], e que se reveste de grande utilidade no sentido de se ultrapassar a dificuldade referida acima. No que se segue só se aplicará a técnica a caps e correspondentes caplets. Este procedimento consta de três etapas: geração de caps artificiais decompostos nos respectivos caplets e interpolação das volatilidades de mercado, cálculo do preço de todos os caps, os de mercado e os artificiais e, finalmente, cálculo das volatilidades dos caplets. No caso de floors e floorlets o procedimento é igual *mutatis mutandis*.

(1) **Caps artificiais e interpolação das volatilidades.**

Os dados de mercado são organizados numa matriz com D linhas e N colunas em que as linhas correspondem às datas de maturidade dos caps e as colunas correspondem aos preços de exercício de referência. Um desses preços é o preço de exercício ATM que depende do cap e que em teoria deve ser igual à taxa de swap a prazo como definido em (1.34). Sejam

- y_n o n -ésimo preço de exercício considerado para o cap;
- s_0 a data da curva de desconto ν considerada;
- s a data, na qual é transacionado um conjunto $\mathcal{C}(y_n, s, t_0, \mathbb{T}_c)$ de D caps, com início na data t_0 , sendo $\mathbb{T}_c = \{T_1, \dots, T_D\}$ o conjunto das D datas de maturidade dos caps ordenadas por ordem crescente;
- t_0 a data inicial de todos os caps.
- $\mathbb{T}_c^p = \{t_{c,1}, \dots, t_{c,d_c}\}$ as datas de pagamento do cap c , sendo $t_{c,d_c} = T_c$.
- $\mathbb{T}_c^r = \{t_{c,0}, \dots, t_{c,d_c-1}\}$ as datas de reset do cap c , sendo $t_{c,0} = t_0$.
- $\mathbb{T}^p = \{t_1, \dots, t_M\} = \bigcup_{c \in \{1, \dots, D\}} \mathbb{T}_{c,k}^p$, o conjunto das datas de pagamento de todos os caps;
- $\mathbb{T}^r = \{t_0, \dots, t_{M-1}\} = \bigcup_{c \in \{1, \dots, D\}} \mathbb{T}_{c,k}^r$, o conjunto das datas de reset de todos os caps;
- $\sigma_n^I(s, t_0, t')$ a função de interpolação/extrapolação

$$\sigma_n^I(s, t_0, t') = \begin{cases} \sigma_n^{int}(s, t_0, T_1), & \text{se } t' \leq T_1 \\ \sigma_n^{int}(s, t_0, t'), & \text{se } T_1 < t' < T_D \\ \sigma_n^{int}(s, t_0, T_D), & \text{se } T_D \leq t' \end{cases}$$

onde $\sigma_n^{int}(s, t_0, t')$ se refere à função interpoladora da volatilidade que pode ter várias formas. Normalmente usa-se uma interpolação linear das volatilidades, isto é, considera-se a função

$$\sigma_n^{int} : [T_1, T_D] \mapsto \mathbb{R}$$

linear por bocados definida pelos pontos $(T_c, \sigma_{c,n}^{mkt})_{c \in \{1, \dots, D\}}$, onde $\sigma_{c,n}^{mkt}$ é a volatilidade de mercado para o preço de exercício y_n de um cap c .

- $\sigma_n^I(s, t_0, t_k)$ a volatilidade do preço de exercício y_n de um cap k com início em t_0 e maturidade na data $t_k \in \mathbb{T}^p$.

(2) Cálculo do preço de todos os caps, os de mercado e os artificiais.

Considere-se o cap que tem maturidade na data $t_M \in \mathbb{T}^p$. Este cap é constituído por M caplets contratados na data s , com data de início t_0 , cujo conjunto de datas de pagamento é \mathbb{T}^p e o preço de exercício é y_n .

Na data s , pretende-se calcular o seu preço $\mathbf{Cap}^{BS}(t_0, t_m, F, y|\mathcal{F}(s))$. O cálculo das volatilidades implícitas a prazo necessárias na determinação do preço referido segue os seguintes passos:

- Geram-se caps $\mathcal{C}(y_n, s, t_0, \mathbb{T}^p)$ artificiais com datas de contratação s e início t_0 com datas de maturidade $t_m \in \mathbb{T}^p$.
- Se o preço de exercício y_n for ATM, para os caps artificiais gerados é necessário calcular os preços ATM, ou seja, as taxas de juro de swap a prazo como definido em (1.34),

$$S_{0,j}(s) = S(s, t_0, t_m), \quad \forall t_m \in \mathbb{T}^p, \quad (3.26)$$

utilizando a curva de desconto $\nu(s, -) = \frac{\nu(s_0, -)}{\nu(s_0, s)}$.

- Para os caplets com datas de pagamento T_1 as volatilidades a considerar são iguais à do cap de mercado com menor data de maturidade, ou seja,

$$\bar{\sigma}^{BS}(y, s, t_{i-1}, t_{0,i}) = \sigma_n^I(s, t_0, T_1), \quad t_1 \leq t_i \leq T_1. \quad (3.27)$$

- Para as outras datas $t_j \in \mathbb{T}^p$, calculam-se as volatilidades interpoladas/extrapoladas $\sigma_n^I(s, t_0, t_j)$ dos caps artificiais correspondentes ao preço de exercício y_n considerado.

- Para cada data $t_m \in \mathbb{T}^p$ calcula-se o preço do cap com início em t_0 e datas de pagamento desde t_1 até t_m ,

$$\begin{aligned} & \mathbf{Cap}^{BS}(t_0, t_m, \sigma_n^I(s, t_0, t_m), S_{0,m}(t_m), y_n | \mathcal{F}(s)) \\ &= \sum_{i=1}^m \mathbf{Caplet}^{BS}(t_{i-1}, t_i, \sigma_n^I(s, t_{i-1}, t_i), F(s, t_{i-1}, t_i), y_n | \mathcal{F}(s)) \end{aligned} \quad (3.28)$$

(3) **Cálculo das volatilidades dos caplets.**

- Para os caplets com datas de pagamento menores ou iguais a T_1 as volatilidades a considerar são iguais à do cap de mercado com menor data de maturidade, ou seja,

$$\sigma_{caplet}(s, t_{i-1}, t_i) = \sigma_{cap}^{mkt}(s, t_0, T_1), \quad t_1 \leq t_i \leq T_1. \quad (3.29)$$

- Para uma data $t_m \in \mathbb{T}^p$ menor ou igual do que t_M , suponha-se já determinadas as volatilidades de caplets $\sigma_{caplet}(s, t_{i-1}, t_i)$ em que $t_1 \leq t_i \leq t_{m-1}$. Então a volatilidade do m -ésimo cap é o valor de σ para o qual

$$\begin{aligned} & \mathbf{Cap}^{BS}(t_0, t_m, \sigma_n^I(s, t_0, t_m), S_{0,m}(t_m), y_n | \mathcal{F}(s)) \\ &= \sum_{i=1}^{m-1} \mathbf{Caplet}^{BS}(t_{i-1}, t_i, \sigma_{caplet}(s, t_{i-1}, t_i), F(s, t_{i-1}, t_i), y_n | \mathcal{F}(s)) \\ &+ \mathbf{Caplet}^{BS}(t_{m-1}, t_m, \sigma, F(s, t_{m-1}, t_m), y_n | \mathcal{F}(s)) \end{aligned} \quad (3.30)$$

A solução da equação (3.30) pode ser calculada por otimização, minimizando o quadrado da diferença absoluta entre os dois membros dessa equação.

Na Tabela (2) estão descritas algumas das funções que foram programadas para proceder ao stripping.

Capítulo 4

Modelo SABR

Como foi referido no capítulo 3, nos modelos de volatilidade estocástica, a função σ é ela própria um processo estocástico dependente da evolução do preço S , do tempo t e do espaço de probabilidade filtrado no qual o processo de preços está definido. Apesar de os modelos de volatilidade local permitirem calibrar a curva da volatilidade considerando a sua relação com o preço de exercício, estes modelos apresentaram limitações na sua capacidade de descrever a dinâmica da curva de volatilidade. Ou seja, permitem obter bons ajustamentos aos dados de mercado já que a calibração é feita de forma exata por via de expressões analíticas mas revelam fragilidades na caracterização da dinâmica da volatilidade.

Neste capítulo descreve-se o modelo SABR, as técnicas envolvidas na sua calibração e a forma como se obtém a função de densidade de probabilidade para o preço de um ativo financeiro numa data futura. Na Tabela (3) estão descritas as funções principais que foram programadas para este efeito.

4.1 Descrição do modelo SABR

Sejam,

- s a data atual.
- $F = (F(t))_{t \geq 0}$ o processo estocástico \mathbb{F} -adaptado.
- $\alpha = (\alpha(t))_{t \geq 0}$ o processo estocástico \mathbb{F} -adaptado da volatilidade de F .
- $\mu \geq 0$ um parâmetro de translação usado para modificar o modelo SABR original para ser um modelo de difusão estocástica com translação, de modo a permitir modelar as taxas de juro negativas que ultimamente têm prevalecido no mercado.

- A dinâmica dos processos estocásticos F e α é descrita pelo seguinte sistema de equações diferenciais estocásticas

$$\begin{cases} dF(t) = \alpha(t)(F(t) + \mu)^\beta dW_F(t), & F(0) = F_0, \\ d\alpha(t) = \nu\alpha(t)dW_\alpha(t), & \alpha(0) = \alpha_0, \end{cases} \quad (4.1)$$

onde os valores F_0 e α_0 são as condições iniciais do sistema (4.1). O parâmetro $\beta \in [0, 1]$ é o coeficiente de elasticidade, ν é o parâmetro da volatilidade do processo da volatilidade α , e, μ é a translação aplicada ao processo F , como foi previamente referido. W_F e W_α são processos de Wiener afetos a F e α respetivamente, cuja correlação é caracterizada pelo parâmetro ρ , isto é,

$$E(dW_F \cdot dW_\alpha) = \rho dt.$$

No caso em que se está a considerar uma opção europeia contratada na data s , com maturidade na data t_{k-1} e data de pagamento na data t_k , preço de exercício y , e em que $F = (F_k(t))_{t < t_k}$ é o processo das taxas de juro simples a prazo (1.32) sobre o qual se exerce a opção usa-se a seguinte notação, em vez da utilizada em (4.1), quando for conveniente especificar na notação quais são as datas de pagamento (e implicitamente a data de exercício t_{k-1}),

$$\begin{cases} dF_k(t) = \alpha_k(t)(F_k(t) + \mu)^\beta dW_F(t), & F_k(0) = F_0, \\ d\alpha_k(t) = \nu\alpha_k(t)dW_{\alpha_k}(t), & \alpha_k(0) = \alpha_0. \end{cases} \quad (4.2)$$

No caso em que se está a considerar uma swaption contratada na data s , com data de exercício t_m sobre um contrato de swap com maturidade na data t_n , preço de exercício y , e em que $S = (S_{m,n}(t))_{t \leq t_m}$ é o processo das taxas de juro simples a prazo (1.34) sobre o qual se exerce a opção usaremos a seguinte notação em vez de (4.1) quando for conveniente especificar na notação quais são a data de exercício t_m e data de maturidade t_n ,

$$\begin{cases} dS_{m,n}(t) = \alpha_{m,n}(t)(S_{m,n}(t) + \mu)^\beta dW_S(t), & S_{m,n}(0) = S_0, \\ d\alpha_{m,n}(t) = \nu\alpha_{m,n}(t)dW_{\alpha_{m,n}}(t), & \alpha_{m,n}(0) = \alpha_0. \end{cases} \quad (4.3)$$

4.1.1 Interpretação dos parâmetros

Nesta secção far-se-á uma análise de sensibilidade aos parâmetros do modelo SABR ilustrada na Figura 4.1 utilizando para o efeito como termo de comparação a volatilidade implícita associada a cada sistema de parâmetros $(\alpha_0, \beta, \rho, \nu)$ para o caso em que se está a considerar os preços das opções europeias como em (4.2). Para calcular essa volatilidade vão ser utilizados alguns dos resultados descritos na secção 4.2.

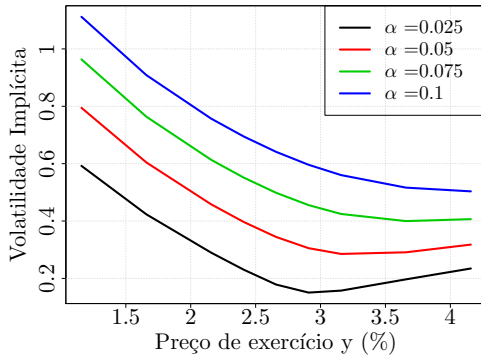
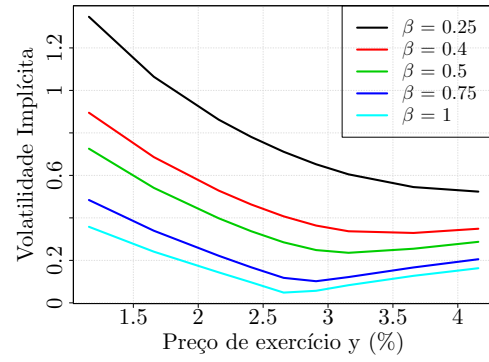
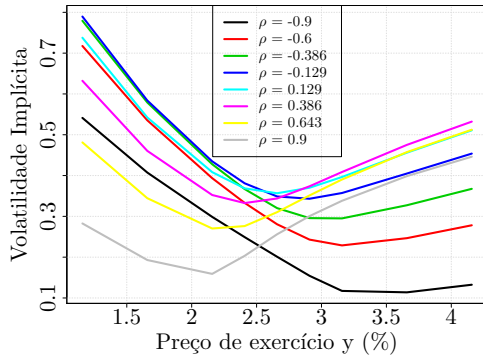
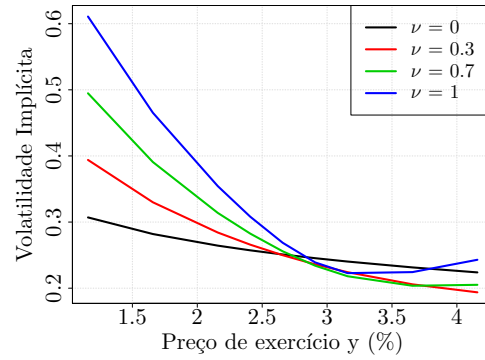
(a) α_0 a variar; $\beta = 0.5$, $\rho = -0.6$, $\nu = 1.3$.(b) β a variar; $\alpha = 0.04$, $\rho = -0.6$, $\nu = 1.3$.(c) ρ a variar; $\alpha = 0.04$, $\beta = 0.5$, $\nu = 1.3$.(d) ν a variar; $\alpha = 0.04$, $\beta = 0.5$, $\rho = -0.6$.

Figura 4.1: Análise de sensibilidade: swaption a 10 anos com maturidade residual igual a 3 anos, com início a 2014-03-17 sendo a taxa de juro a prazo aproximadamente 0.027.

- O parâmetro $\alpha_0 \in \mathbb{R}^+$ promove translações no eixo da volatilidade proporcionais ao seu valor.
- O parâmetro β é também denominado por constante de elasticidade da variância (CEV). Este parâmetro toma valores não negativos, no entanto, os processos F e α são martingalas se e só se

$$\beta \in [0, 1[\quad \text{ou} \quad \beta = 1 \text{ e } \rho \leq 0.$$

No que se segue β está definido sob estas condições. O seu efeito na curva de volatilidade traduz-se em translações no eixo da volatilidade implícita e no declive da curva, principalmente para preços de exercício baixos.

Considerando $\alpha(t)$ constante, há modelos que se obtêm como casos particulares do modelo SABR dependendo dos valores de β .

- Se $\beta = 0$, então obtém-se o modelo normal de *Bachelier* (3.3)

$$dF(t) = \alpha_0 dW_F(t).$$

Esta escolha de β permite que F tome valores negativos.

A função densidade de probabilidade $p(F, y)$ de $F(t)$ é normal se e só se $\alpha(t)$ for constante.

- Se $0 < \beta < 1$, o processo $F(t)$ é não-negativo e a taxa de juro $F(t) = 0$ é uma barreira absorvente. Este facto reflete-se na atribuição de valores de densidade de probabilidade algo elevados para $F(t) = 0$, ou seja, existe uma massa de probabilidade não nula associada a $F(t) = 0$. Do ponto de vista do mercado esta caracterização pode até ser realista, uma vez que, na prática, há possibilidade de $F(t)$ ser negativo. Não é de esperar, nesse caso, que se distancie muito de $F(t) = 0$.
- Se $\beta = 1$, obtém-se o modelo lognormal de *Black* (3.7)

$$dF(t) = \alpha_0 F(t) dW(t).$$

A função densidade de probabilidade de $F(t)$ é lognormal se e só se $\alpha(t)$ for constante.

- O parâmetro $\rho \in [-1, 1]$ define a correlação entre os processos $dW_F(t)$ e $dW_\alpha(t)$. O seu efeito na curva de volatilidade é idêntico ao de β : influi no declive da mesma (note-se que na Figura 4.1b se considerou $\rho = -0.6$).

Na Figura 4.1c, comparando com 4.1b, é possível observar que essa semelhança só se verifica se o sinal de ρ for o mesmo. Por isso é prática comum calibrar apenas um dos dois parâmetros, fixando o outro previamente.

- O parâmetro ν representa a volatilidade do processo da volatilidade $\alpha_k(t)$. Este parâmetro impacta na curvatura da curva de volatilidade.

Para curvaturas mais acentuadas registam-se valores de ν maiores à medida que há um afastamento do valor ATM - característico de mercados voláteis.

4.1.2 Densidade de Probabilidade de um preço futuro

Considere-se um *caplet* relativo à taxa $F_k(t_{k-1})$ transacionado na data t e com data de maturidade t_{k-1} , replicável por um portfólio φ . Relembrando a definição 1.23, o preço

unitário do *caplet* é a esperança matemática,

$$\begin{aligned}\pi(t, H_E^{caplet}(t, F_k(t), \alpha_k(t))) &= \frac{1}{X(t)} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left(X(t_{k-1}) H_E^{caplet}(t_{k-1}, F_k(t_{k-1}), \alpha_k(t_{k-1})) | \mathcal{F}(t) \right) \\ &= B(t, t_k) \mathbb{E}_{\mathbb{Q}(t)} \left((F_k(t_{k-1}) - K)^+ \right) \\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}(t)} \left(H_E^{caplet}(t_{k-1}, F_k(t_{k-1}), \alpha_k(t_{k-1})) \right),\end{aligned}\quad (4.4)$$

onde

$$H_E^{caplet}(t, F_k(t), \alpha_k(t)) \quad (4.5)$$

é a dívida contingente calculada na data t .

O preço 4.4 depende das condições terminais

$$(F_f = F_k(t_{k-1}), \alpha_f = \alpha_k(t_{k-1}))$$

dos processos F e α que se pretende prever através do modelo SABR.

O valor esperado do portfólio que replica a dívida contingente (4.5) tem uma medida de probabilidade descrita pela densidade de probabilidade $p(t, t_k; F_k(t), \alpha_k(t), F_f, \alpha_f)$, condicionada pela σ -álgebra $\mathcal{F}(t)$, de os processos F_k e α_k atingirem um certo estado (F_f, α_f) na data de maturidade t_{k-1} ,

$$p(t, t_k; F_k(t), \alpha_k(t), F_f, \alpha_f) \quad (4.6)$$

onde $F_k(t)$ e $\alpha_k(t)$ são as condições iniciais conhecidas na data t .

Para simplificar a notação $H(F_k, \alpha_k) = H_E^{caplet}(u, F_k(u), \alpha_k(u))$ para um instante genérico $u \in \mathbb{T}$. Se, num dado instante $t^* \in \mathbb{T}$, $H(F_k, \alpha_k)$ tomar um valor específico escreve-se $H(t^*, F_k, \alpha_k)$.

Escreve-se também $p(t_k; F_k, \alpha_k) = p(t, t_k; F_k(t), \alpha_k(t), F_k, \alpha_k)$. Reescrevendo (4.4),

$$\begin{aligned}\pi(t, H(F_k, \alpha_k)) &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}(t)} (H(t_{k-1}, F_k, \alpha_k)) = \\ &= \int \int H(F_k, \alpha_k) p(t_k; F_k, \alpha_k) dF_k d\alpha_k\end{aligned}\quad (4.7)$$

Recorrendo à expansão pelo Lema de Itô obtém-se

$$\begin{aligned}H(t_{k-1}, F_k, \alpha_k) &= H(t, F_k, \alpha_k) \\ &+ \int_t^{t_{k-1}} \frac{1}{2} \alpha_k(s)^2 F_k(s)^{2\beta_k} \frac{\partial^2 H(F_k, \alpha_k)}{\partial F_k^2} ds \\ &+ \int_t^{t_{k-1}} \left(\frac{1}{2} \alpha(s)^2 \nu^2 \frac{\partial^2 H(F_k, \alpha_k)}{\partial \alpha_k^2} ds + \alpha_k(s)^2 \rho \nu F_k(s)^{\beta_k} \frac{\partial^2 H(F_k, \alpha_k)}{\partial F_k \partial \alpha_k} \right) ds \\ &+ \int_t^{t_{k-1}} \alpha_k(s) F_k(s)^{\beta_k} \frac{\partial H(F_k, \alpha_k)}{\partial F_k} dW_{F_k}(s) \\ &+ \int_t^{t_{k-1}} \alpha_k(s) \nu \frac{\partial H(F_k, \alpha_k)}{\partial \alpha_k} dW_{\alpha_k}(s).\end{aligned}$$

Substituindo na equação (4.7), os termos estocásticos anulam-se, pela propriedade da isometria dos integrais de Itô. Consequentemente, resulta

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}(t)}(H(t_{k-1}, F_k, \alpha_k)) &= H(t, F_k, \alpha_k) \\ &+ \frac{1}{2} \int \int \int_t^{t_{k-1}} \alpha_k(s)^2 F_k(s)^{2\beta} \frac{\partial^2 H(F_k, \alpha_k)}{\partial F_k^2} p(t_{k-1}, F_k, \alpha_k) ds dF_k d\alpha_k \\ &+ \frac{1}{2} \int \int \int_t^{t_{k-1}} \alpha_k(s)^2 \nu^2 \frac{\partial H(F_k, \alpha_k)}{\partial \alpha_k^2} p(t_{k-1}, F_k, \alpha_k) ds dF_k d\alpha_k \\ &+ \int \int \int_t^{t_{k-1}} \alpha(s)^2 \rho \nu^2 F_k^\beta \frac{\partial^2 H(F_k, \alpha_k)}{\partial F_k \partial \alpha_k} p(t_{k-1}, F_k, \alpha_k) ds dF_k d\alpha_k. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Derivando a expressão obtida em ordem à maturidade residual da opção $z = t_{k-1} - t$,

$$\begin{aligned} \int \int H(F_k, \alpha_k) \frac{\partial p(z; F_k, \alpha_k)}{\partial z} dF_k d\alpha_k &= \\ \frac{1}{2} \int \int \int_t^{t_{k-1}} \left(\alpha_k(s)^2 F_k(s)^{2\beta} \frac{\partial^2 H(F_k, \alpha_k)}{\partial F_k^2} p(t_{k-1}, F_k, \alpha_k) \right) dF_k d\alpha_k \\ &+ \frac{1}{2} \int \int \int_t^{t_{k-1}} \left(\alpha(s)^2 \nu^2 \frac{\partial H(F_k, \alpha_k)}{\partial \alpha_k^2} p(t_{k-1}, F_k, \alpha_k) \right) dF_k d\alpha_k \\ &+ \int \int \int_t^{t_{k-1}} \left(\alpha(s)^2 \rho \nu^2 F_k^\beta \frac{\partial^2 H(F_k, \alpha_k)}{\partial F_k \partial \alpha_k} p(t_{k-1}, F_k, \alpha_k) \right) dF_k d\alpha_k. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Integrando por partes duas vezes e notando que as condições de fronteira são nulas, a equação é solução da equação às derivadas parciais de *Fokker-Planck*,

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \alpha_k^2 F_k^{2\beta} p}{\partial F_k^2} + \frac{1}{2} \nu^2 \frac{\partial^2 \alpha_k^2 p}{\partial \alpha_k^2} + \rho \nu \frac{\partial^2 \alpha_k^2 F_k^\beta p}{\partial \alpha_k \partial F_k}, \quad (4.10)$$

cujas condições de fronteira são

$$p(t_{k-1}) = \begin{cases} 1, \text{ se } F_k(t_{k-1}) = F_0, \alpha_k(t_{k-1}) = \alpha_k(t) \\ 0, \text{ caso contrário.} \end{cases}$$

Mudando de variável

$$-\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \alpha^2 F_k^{2\beta} p}{\partial F_k^2} + \frac{1}{2} \nu^2 \frac{\partial^2 \alpha^2 p}{\partial \alpha^2} + \rho \nu \frac{\partial^2 \alpha^2 F_k^\beta p}{\partial \alpha \partial F_k}. \quad (4.11)$$

Das equações (4.10) e (4.11) conclui-se que a solução da primeira é homogênea relativamente à dimensão temporal. Portanto, tomando como dimensão temporal a maturidade residual da opção, $z = t_{k-1} - t$, a evolução de p é (4.10). A solução de (4.11) pode ser obtida por simulação de *Monte-Carlo* utilizando o teorema de *Feynman-Kac* mas também por métodos de diferenças finitas. Os métodos utilizados nesta tese baseiam-se porém em aproximações analíticas que serão apresentadas na secção 4.2.

4.2 Ajustamento smile

Como foi referido, Hagan et al. [13] obtiveram algebricamente fórmulas para determinar o preço de opções europeias a partir do modelo SABR. As expressões obtidas para os preços permitem chegar a uma aproximação que é a expansão truncada da expressão algébrica da volatilidade implícita segundo os modelos normal de *Bachelier* e lognormal de *Black*. Mais tarde, *Jan Oblój* publicou [23] algumas correções às aproximações de *Hagan* para o caso lognormal, mais concretamente, retificando os preços negativos que a fórmula de *Hagan* produz quando preços de exercício são muito baixos relativamente a F_0 .

Estas aproximações permitem interpolar a superfície de volatilidade para preços de exercício que não estão cotados no mercado. À curva da superfície de volatilidade associada a cada maturidade residual chama-se *smile* ou curva de volatilidade.

4.2.1 Aproximação de Hagan normal

Dado o cenário de taxas de juro de mercado muito baixas, algumas opções passaram a ser cotadas em termos da volatilidade implícita normal. No entanto, para taxas de juro negativas as equações (4.12) e (4.17) não têm solução nos casos em que $\frac{F_0}{y} < 0$, a menos que seja introduzida uma translação suficientemente grande $\mu \geq 0$ tal que $\frac{F_0 + \mu}{y + \mu} > 0$. A fórmula que aproxima a volatilidade implícita normal de uma opção europeia contratada na data s , data de maturidade na data $u = s + z$, sendo z a maturidade residual, é

- Se $y \neq F_0$,

$$\sigma^N(s, u, y; F_0) = \frac{(F_0 - y)\nu}{\xi(\zeta(y))} \left(1 + \left(g(y) + \frac{\alpha_0 \beta \rho \nu (F_0 + \mu)^{\frac{\beta-1}{2}} (y + \mu)^{\frac{\beta-1}{2}}}{4} + \frac{(2 - 3\rho^2)\nu^2}{24} \right) z \right); \quad (4.12)$$

- Se $y = F_0$

$$\sigma^N(s, u, F_0; F_0) = \alpha_0 (F_0 + \mu)^\beta \left(1 + \left(g(F_0) + \frac{1}{4} \alpha_0 \beta \rho \nu (F_0 + \mu)^{\beta-1} + \frac{1}{24} (2 - 3\rho^2) \nu^2 \right) z \right), \quad (4.13)$$

com

$$g(y) = \frac{1}{24} (\beta^2 - 2\beta) (F_0 + \mu)^{\beta-1} (y + \mu)^{\beta-1} \alpha_0^2, \quad (4.14)$$

$$\zeta(y) = \frac{\nu}{\alpha_0(1 - \beta)} \left((F_0 + \mu)^{1-\beta} - (y + \mu)^{1-\beta} \right),$$

$$\xi(y) = (h \circ \zeta)(y) = \log \left(\frac{\sqrt{1 - \rho \zeta(y) + \zeta(y)^2} - \rho + \zeta(y)}{1 - \rho} \right), \quad (4.15)$$

onde

$$h(y) = \log \left(\frac{\sqrt{1 - \rho y + y^2} - \rho + y}{1 - \rho} \right).$$

Notar que,

- Se $\beta = 1$,

$$g(y) = -\frac{1}{24}\alpha_0^2, \quad \zeta(y) = \frac{\nu}{\alpha_0} \log \left(\frac{F_0 + \mu}{y + \mu} \right);$$

- Se $\beta = 0$,

$$g(y) = 0, \quad \zeta(y) = \frac{\nu}{\alpha_0} (F_0 - y);$$

- Se $\nu \rightarrow 0$,

$$\xi(y) \sim \frac{1}{\nu} \zeta(y); \quad (4.16)$$

4.2.2 Aproximação de Hagan lognormal

A fórmula de *Hagan* para a volatilidade lognormal com as correções de *Obloj* para a existência de pelo menos uma solução quando $\beta \rightarrow 1$ é

- Se $y \neq F_0$,

$$\begin{aligned} \sigma^B(s, u, y; F_0) = & \frac{\nu}{\zeta(y)} \log \left(\frac{F_0 + \mu}{y + \mu} \right) \\ & \cdot \left(1 + \left(g(y) + \frac{1}{4}\alpha_0\beta\rho\nu(F_0 + \mu)^{\frac{\beta-1}{2}}(y + \mu)^{\frac{\beta-1}{2}} + \frac{1}{24}(2 - 3\rho^2)\nu^2 \right) z \right). \end{aligned} \quad (4.17)$$

- Se $y = F_0$,

$$\begin{aligned} \sigma^B(s, u, F_0; F_0) = & \alpha_0(F_0 + \mu)^{\beta-1} \\ & \left(1 + \left(g(F_0) + \frac{1}{4}\alpha_0\beta\rho\nu(F_0 + \mu)^{\beta-1} + \frac{1}{24}(2 - 3\rho^2)\nu^2 \right) z \right). \end{aligned} \quad (4.18)$$

onde ζ e ξ se mantêm como definidas em (4.14) e (4.15) e

$$g(y) = \frac{1}{24}(\beta - 1)^2(F_0 + \mu)^{\beta-1}(y + \mu)^{\beta-1}\alpha_0^2.$$

Notar que,

- Se $\beta = 1$,

$$g(y) = 0$$

- Se $\beta = 0$,

$$g(y) = \frac{\alpha_0^2}{24(F_0 + \mu)(y + \mu)}$$

Serão apresentados resultados relativos à aproximação de *Obloj* e à de *Hagan* original:

$$\begin{aligned} \sigma^B(s, u, y; F_0) = & \frac{\nu}{\zeta(y)\xi(y)} \log \left(\frac{F_0 + \mu}{y + \mu} \right) \\ & \cdot \left(1 + \left(g(y) + \frac{1}{4}\alpha_0\beta\rho\nu(F_0 + \mu)^{\frac{\beta-1}{2}}(y + \mu)^{\frac{\beta-1}{2}} + \frac{1}{24}(2 - 3\rho^2)\nu^2 \right) z \right) \end{aligned} \quad (4.19)$$

Como *Hagan et. al* [13] obtiveram a fórmula (4.19) para a volatilidade lognormal (4.17) a partir da aproximação que deduziram como aproximação (4.12) da volatilidade normal, é importante ter em conta que a precisão pode não ser a desejada para volatilidades implícitas mais altas. Este facto pode repercutir-se na convergência dos algoritmos de otimização utilizados durante o processo de calibração do modelo SABR [18].

4.3 Calibração do modelo SABR

Nesta secção aborda-se a calibração do modelo SABR relativamente a opções europeias. Na data s , existe um conjunto de instrumentos financeiros $(I(z))_{z \in \mathbb{B}}$, como os referidos, que diferem nas suas maturidades residuais, $z \in \mathbb{B}$, onde \mathbb{B} é o conjunto das maturidades residuais de mercado. Pretende-se determinar a matriz de parâmetros $(\theta(z))_{z \in \mathbb{B}} = (\alpha_0, \beta, \rho, \nu)_{z \in \mathbb{B}}$ que melhor se ajustam a cada curva (smile) de volatilidade de acordo com as maturidades residuais $z \in \mathbb{B}$ na data s .

O vetor de parâmetros ótimos, $\theta(z) = \theta^*(z)$, é tal que,

$$\arg \min_{\theta(z)} \left(\sum_{y \in \mathbb{Y}} (\sigma(s, s + z, F_0, y, \theta) - \hat{\sigma}(s, s + z, y))^2 \right), \quad (4.20)$$

onde $(\hat{\sigma}(s, s + z, y))_{y \in \mathbb{Y}}$ são as volatilidades implícitas, tipicamente expressas como volatilidade normal ou lognormal, registadas no mercado na data s , e \mathbb{Y} é o conjunto de preços de exercício para os quais estão cotadas. Os parâmetros ótimos $(\theta(z)^*)_{z \in \mathbb{B}}$ são calculados recorrendo a algoritmos de otimização, cuja função objectivo é (4.20).

Na literatura surgem várias abordagens para melhorar o processo de calibração dos parâmetros SABR. Estas referem-se à estimação de parâmetros iniciais adequados e ao refinamento, posterior à otimização, do parâmetro α_0 .

4.3.1 Parâmetros iniciais

Dado β , a ideia para determinar os valores iniciais para os parâmetros α_0 , ρ e ν que correspondem aos valores da volatilidade ATM, σ_0 , do seu viés¹ σ'_0 e sua curvatura σ''_0 .

¹ *skew*.

Nesse sentido procede-se à expansão de $x = \log\left(\frac{y + \mu}{F_0 + \mu}\right)$ em torno de $x = 0$ que se espera que descreva com adequada precisão uma aproximação da volatilidade ATM. No caso da volatilidade lognormal tem-se,

$$\begin{aligned} \sigma^B(s, u, y; F_0) &= \alpha_0(F_0 + \mu)^{\beta-1} + \frac{1}{2} \left(\rho\nu - (1 - \beta)\alpha_0(F_0 + \mu)^{\beta-1} \right) x \\ &\quad + \frac{1}{12\alpha_0(F_0 + \mu)^{\beta-1}} \left((1 - \beta)^2(\alpha_0(F_0 + \mu)^{\beta-1})^2 + \nu^2(2 - 3\rho^2) \right) x^2. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Da expressão acima obtém-se

$$\begin{cases} \sigma_0 = \alpha_0(F_0 + \mu)^{\beta-1} \\ \sigma'_0 = \frac{1}{2} \left(\rho\nu - (1 - \beta)\alpha_0(F_0 + \mu)^{\beta-1} \right) \\ \sigma''_0 = \frac{1}{12\alpha_0(F_0 + \mu)^{\beta-1}} \left((1 - \beta)^2(\alpha_0(F_0 + \mu)^{\beta-1})^2 + \nu^2(2 - 3\rho^2) \right) \end{cases}$$

e resolvendo em ordem aos parâmetros do modelo.

$$\begin{cases} \alpha_0 = \sigma_0(F_0 + \mu)^{1-\beta} \\ \nu = \left(3\sigma_0\sigma''_0 - \frac{1}{2}(1 - \beta)^2\sigma_0^2 + \frac{3}{2}(2\sigma'_0 + (1 - \beta)\sigma_0)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ \rho = \frac{1}{\nu}(2\sigma'_0 + (1 - \beta)\sigma_0) \end{cases}$$

No caso da volatilidade normal, converte-se em volatilidade normal pela fórmula lognormal e aplica-se o mesmo método.

$$\begin{aligned} \sigma^N(s, u, y; F_0) &= \alpha_0(F_0 + \mu)^\beta + \frac{1}{2} \left(\rho\nu(F_0 + \mu) + \alpha_0\beta(F_0 + \mu)^\beta \right) x \\ &\quad + \left(\frac{1}{12\alpha_0(F_0 + \mu)^{\beta-2}}(2\nu^2 - 3\rho^2\nu^2) + \frac{1}{4}\rho\nu(F_0 + \mu) + \frac{1}{12}(\beta^2 + \beta)\alpha_0(F_0 + \mu)^\beta \right) x^2. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Da expressão acima obtém-se

$$\begin{cases} \sigma_0 = \alpha_0(F_0 + \mu)^\beta \\ \sigma'_0 = \frac{1}{2} (\rho\nu(F_0 + \mu) + \beta\sigma_0) \\ \sigma''_0 = \frac{(F_0 + \mu)^2}{6\sigma_0} (2\nu^2 - 3\rho^2\nu^2) + \frac{1}{2}\rho\nu(F_0 + \mu) + \frac{1}{6}(\beta^2 + \beta)\sigma_0 \end{cases}$$

e resolvendo em ordem aos parâmetros do modelo.

$$\begin{cases} \alpha_0 = \sigma_0(F_0 + \mu)^{-\beta} \\ \nu^2 = \frac{1}{(F_0 + \mu)^2} \left(3\sigma_0\sigma''_0 - \frac{1}{2}(\beta^2 + \beta)\sigma_0^2 - 3\sigma_0(\sigma'_0 - \frac{1}{2}\beta\sigma_0) + \frac{3}{2}(2\sigma'_0 - \beta\sigma_0)^2 \right) \\ \rho = \frac{1}{\nu(F_0 + \mu)}(2\sigma'_0 - \beta\sigma_0) \end{cases}$$

Escolha de β

Os efeitos produzidos pelos parâmetros β e ρ são similares e, por essa razão, um deles poderá ser fixado *a priori* sendo o outro sujeito a calibração. Na literatura, nomeadamente em [28], é usual proceder-se à escolha do parâmetro β , quer por critérios *expert* - baseados nas características do mercado - quer por via analítica - como se descreve de seguida. Da equação (4.18) obtém-se um valor aproximado para β , por regressão linear utilizando volatilidades ATM registadas no mercado para diferentes preços futuros,

$$\beta = \arg \min_{F_0(z), z \in \mathbb{B}} \left((\log(\sigma_0^B(t, u, y; F_0)) - \log(\alpha) - (1 - \beta) \log(F_0))^2 \right). \quad (4.23)$$

Na prática, a qualidade do ajustamento do modelo linear aos dados depende do critério de seleção de dados, já que são esperadas tendências diferentes nos curto, médio e longo prazos [28].

Refinamento de α

Em [28] Graeme West fornece uma forma para refinar o parâmetro α_0 , depois de obtidos os parâmetros por otimização.

Uma vez fixado β e determinados os parâmetros α_0 , ρ e ν ótimos (4.20), pode proceder-se ao refinamento do parâmetro α_0 .

Pretende-se estabelecer uma correspondência entre α_0 e a volatilidade ATM. Do ponto de vista prático, espera-se que o maior volume de transações surja em torno deste ponto do *smile*, e, como tal, que esta correspondência se traduza num ajustamento mais realista e sensível ao volume de transações.

Invertendo a expressão (4.21) no caso ATM da volatilidade lognormal, obtém-se o polinómio (4.24),

$$\frac{(1 - \beta)^2 z}{24(F_0 + \mu)^{2(1-\beta)}} \alpha_0^3 + \frac{1}{4} \frac{\beta \rho \nu z}{(F_0 + \mu)^{1-\beta}} \alpha_0^2 + \left(1 + \frac{2 - 3\rho^2}{24((F_0 + \mu)^{1-\beta})} \nu^2 z \right) \alpha_0 - \sigma_1^B(s, u, F_0; F_0)(F_0 + \mu)^{1-\beta}. \quad (4.24)$$

Invertendo a expressão (4.22) no caso ATM da volatilidade normal, obtém-se o polinómio (4.25),

$$\frac{(\beta^2 + \beta)^2 z}{24(F_0 + \mu)^{2(1-\beta)}} \alpha_0^3 + \frac{1}{4} \frac{\beta \rho \nu z}{(F_0 + \mu)^{1-\beta}} \alpha_0^2 + \left(1 + \frac{2 - 3\rho^2}{24((F_0 + \mu)^\beta)} \nu^2 z \right) \alpha_0 - \sigma_1^N(s, u, F_0; F_0)(F_0 + \mu)^{-\beta}. \quad (4.25)$$

O valor de α_0 será a menor raiz real positiva do polinómio (4.24) se se estiver no caso lognormal e do polinómio (4.25) se se estiver no caso normal. Esta abordagem pressupõe que β , ρ e ν tenham sido determinados à partida.

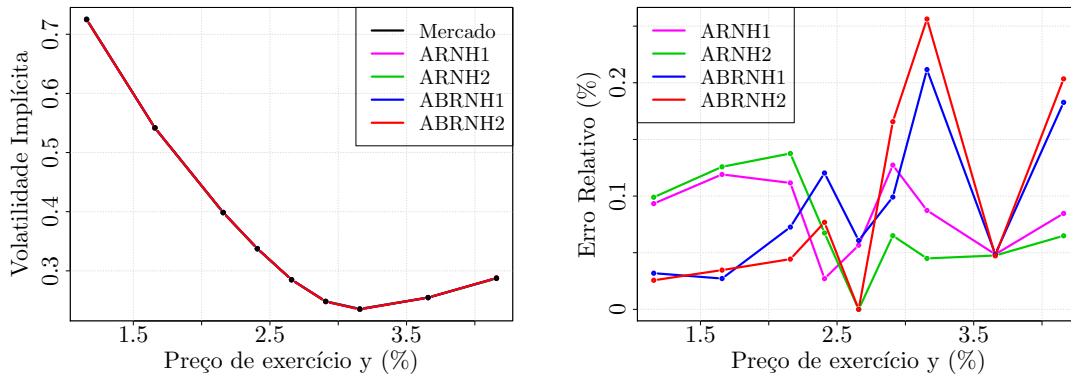


Figura 4.2: Ajustamento ao smile de swaptions a 10 anos com maturidade residual igual a 3 anos, com início a 2014-03-17 sendo a taxa de juro a prazo aproximadamente 0.027.

Esta aproximação do parâmetro poderá ser particularmente útil no cálculo da função objectivo, fornecendo o parâmetro α_0 que melhor se ajusta aos parâmetros de cada iteração do algoritmo de otimização. Esta prática não dispensa, contudo, um refinamento final para os melhores parâmetros encontrados.

Numa abordagem alternativa, implementou-se uma rotina que toma um número de valores de arranque aleatórios no domínio admissível de β e procede à optimização dos restantes parâmetros escolhendo os que providenciam um melhor ajustamento aos dados de mercado.

Para optimizar (4.20) foram usadas as funções:

- *nlsminb* da *package stats* do *R* que minimiza funções diferenciáveis não lineares com restrições nos parâmetros[19];
- *nls.lm* da *package minpack.lm* do *R* e que resolve problemas não-lineares de mínimos quadrados com recurso a uma versão do algoritmo de *Levenberg-Marquardt*[17].

Os resultados obtidos no ajustamento da curva de volatilidade apresentam bastante qualidade (Figura 4.2). Nesta pode observar-se que o refinamento de α_0 se traduz numa correspondência para o preço de exercício ATM. Para preços ITM, os métodos ARNH2 (β pré-fixado com refinamento de α_0) e ABRNH1 (β com multi-arranque e sem refinamento de α_0) tiveram melhores desempenhos. Para os preços OTM, a tendência inverte-se e os desempenhos foram melhores para os métodos ARNH1 (β pré-fixado sem refinamento de α_0) e ABRNH2 (β com multi-arranque e refinamento de α_0).

Os resultados poderão variar de acordo com o preço de exercício considerado (Figura 4.3), com a maturidade associada à curva de volatilidade (Figura 4.4), características conjuntu-

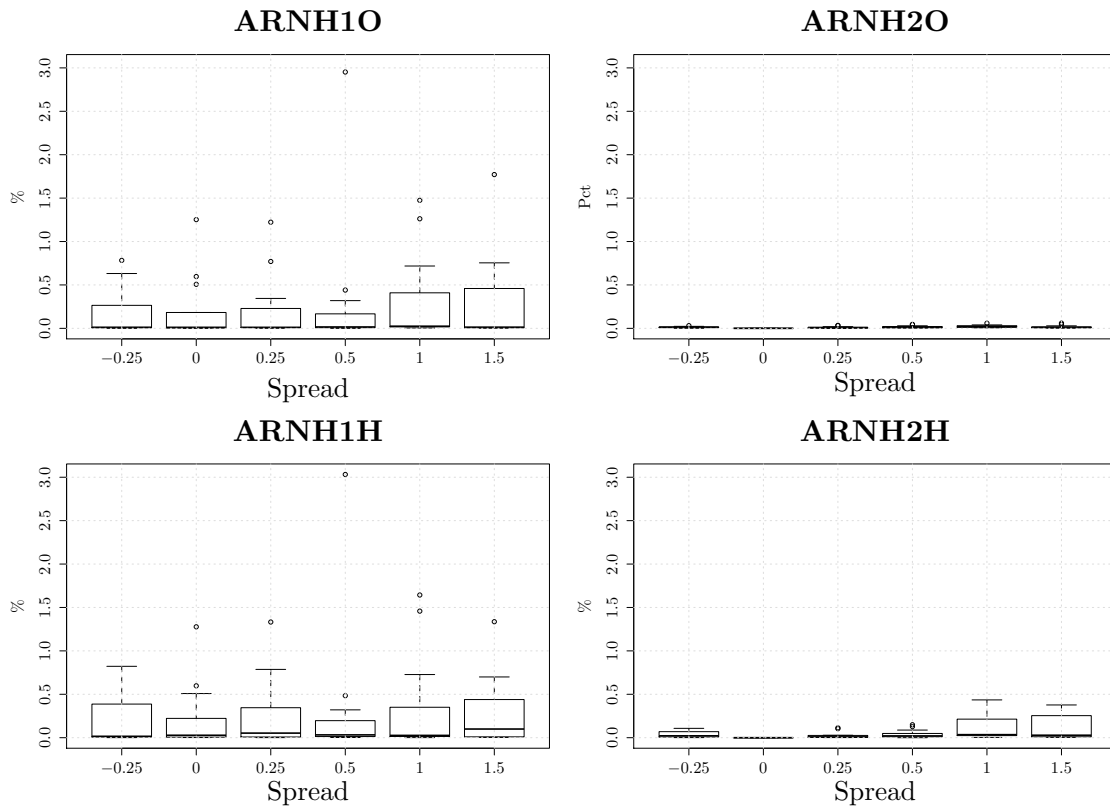


Figura 4.3: Distribuição dos erros por preço de exercício e por metodologia utilizada.

rais do mercado, aproximações utilizadas, métodos, algoritmos de otimização e *hardware*.

Os procedimentos ARNH1O e ARNH2O são calibrações onde se utilizou a aproximação da volatilidade de Oblój e ARNH1H e ARNH2H são calibrações onde se utilizou a aproximação da volatilidade de Hagan.

O método utilizado foi o ARNH2O por apresentar erros relativos menores e por envolver menor tempo de computação.

Para as várias maturidades residuais obtiveram-se, para os dados apresentados, os seguintes parâmetros (Tabela 4.1).

Para maiores maturidades residuais, verifica-se

- uma tendência decrescente de α_0 de acordo com a ideia que os negócios de maior volatilidade são os de curto prazo.
- uma tendência decrescente, em valor absoluto, de ρ que se explica pela menor influência que o acontecimento no presente tem nas decisões para longo prazo.
- uma tendência decrescente de ν seguindo a mesma linha de raciocínio de α_0 .

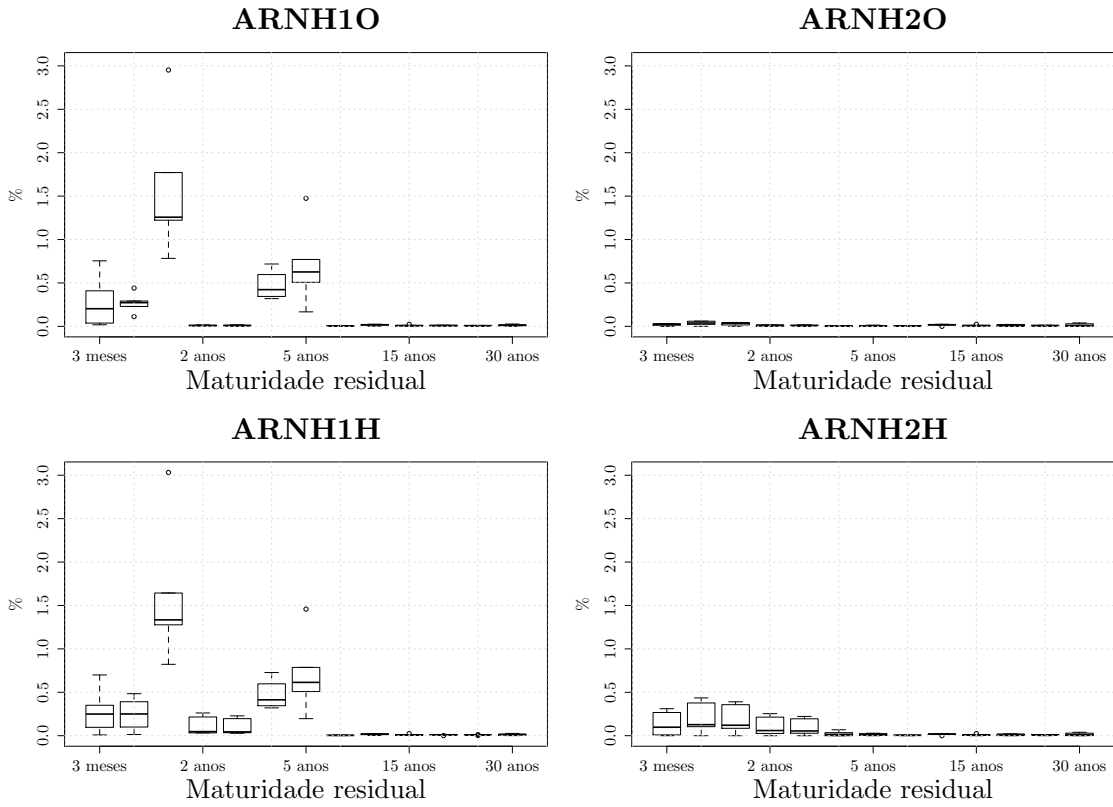


Figura 4.4: Distribuição dos erros por maturidade residual da opção e por metodologia utilizada.

4.4 Função de densidade de probabilidade

Uma vez introduzidas algumas variantes para calibração do modelo SABR, é possível agora estimar a função densidade de probabilidade de $F(t)$ condicionada pela σ -álgebra $\mathcal{F}(t)$, por simulação de *Monte Carlo*.

Nesta secção apresentam-se duas alternativas - métodos de *Euler* e de *Milstein* - para a discretização do sistema equações (4.1). Serão ainda apresentadas duas formas de calcular a função de densidade de probabilidade analiticamente - Breeden & Litzenberger (secção 1.17) e Hagan, Lesniewski e Woodward (HLW)[12].

4.4.1 Geração de variáveis aleatórias correlacionadas

A simulação por métodos de *Monte Carlo* de processos estocásticos compreende a amostragem de variáveis aleatórias correlacionadas.

Notação 4.1. Nota-se por $\mathcal{M}(\mathbb{R})_{m \times n}$ o conjunto das matrizes reais com m linhas e n colunas.

Mat. Res.	α_0	β	ρ	ν
3 meses	0.040	0.5	-0.294	0.878
6 meses	0.044	0.5	-0.819	1.400
1 anos	0.050	0.5	-0.866	1.650
2 anos	0.044	0.5	-0.600	1.240
3 anos	0.041	0.5	-0.580	1.280
4 anos	0.044	0.5	-0.498	0.649
5 anos	0.048	0.5	-0.739	0.730
7 anos	0.043	0.5	0.063	0.021
10 anos	0.041	0.5	0.213	0.009
15 anos	0.039	0.5	0.122	0.004
20 anos	0.036	0.5	0.583	0.017
25 anos	0.033	0.5	0.026	0.011
30 anos	0.030	0.5	0.117	0.002

Tabela 4.1: Parâmetros obtidos para o melhor ajustamento: ARNH2O. Fixou-se $\beta = 0.5$

Seja $C \in \mathcal{M}(\mathbb{R})_{n \times n}$ a matriz de covariância da variável aleatória $Y \in \mathcal{M}(\mathbb{R})_{n \times 1}$ com média zero então $C = \mathbb{E}(YY^T)$ é simétrica e vai-se admitir que é definida positiva.

Pela decomposição de *Cholesky* tem-se $C = LL^T$, onde L é uma matriz triangular inferior.

Seja $X \in \mathcal{M}(\mathbb{R})_{n \times 1}$ uma variável aleatória que segue uma distribuição normal multivariada, $X \sim \mathcal{N}(0, I)$, onde $I \in \mathcal{M}(\mathbb{R})_{n \times n}$ denota a matriz identidade.

Seja $Z = LX$ uma variável aleatória com média 0 e matriz de covariância C . Portanto, a variável aleatória Z tem C como matriz de covariância.

Desta forma é possível gerar os movimentos Brownianos que governam os processos F_k e α_k especificando a correlação entre ambos.

4.4.2 Discretização do modelo SABR

Seja t_0 a data atual e t a data para a qual se deseja obter uma estimativa de $F(t)$. Seja $n \in \mathbb{N}$ o número de passos de tempo t_i , compreendidos entre t_0 e t , tais que $t_i = t_0 + i \cdot \frac{t-t_0}{n}$, com $i \in \{0, \dots, n-1\}$.

Serão apresentadas aproximações numéricas das equações diferenciais estocásticas do sistema (4.1) obtidas pelos métodos de *Euler-Maruyama* e de *Milstein*.

- **Discretização de *Euler-Maruyama*:**

A reescrita de (4.1) de acordo com a discretização de *Euler-Maruyama* é

$$\hat{F}(t_{i+1}) = \hat{F}(t_i) + \hat{\alpha}(t_i)\hat{F}(t_i)^\beta \Delta W_{\hat{F}}(t_{i+1}) \quad (4.26)$$

$$\hat{\alpha}(t_{i+1}) = \hat{\alpha}(t_i) + \nu \hat{\alpha}(t_i) \Delta W_{\hat{\alpha}}(t_{i+1}), \quad (4.27)$$

onde \hat{F} e $\hat{\alpha}$ são os processos F e α discretizados. A componente aleatória é gerada como foi referido na secção 4.4.1. O incremento dos processos de *Wiener* são

$$\Delta W_{\hat{F}}(t_{i+1}) = \sqrt{t_{i+1} - t_i} Z(t_{i+1}) \quad (4.28)$$

$$\Delta W_{\hat{\alpha}}(t_{i+1}) = \sqrt{t_{i+1} - t_i} \left(\rho Z(t_{i+1}) + \sqrt{1 - \rho^2} Y(t_{i+1}) \right) \quad (4.29)$$

Finalmente, substituindo 4.28 e 4.29 em 4.26 e 4.27, respectivamente, o método de Euler para o modelo SABR é

$$\begin{aligned} \hat{F}(t_{i+1}) &= \hat{F}(t_i) + \hat{\alpha}(t_i)\hat{F}(t_i)^\beta \sqrt{t_{i+1} - t_i} Z(t_{i+1}) \\ \hat{\alpha}(t_{i+1}) &= \hat{\alpha}(t_i) + \nu \hat{\alpha}(t_i) \sqrt{t_{i+1} - t_i} \left(\rho Z(t_{i+1}) + \sqrt{1 - \rho^2} Y(t_{i+1}) \right), \end{aligned}$$

onde $Y(t_{i+1})$ e $Z(t_{i+1})$ são realizações na data t_{i+1} das variáveis aleatórias Y e Z que seguem uma distribuição normal de média 0 e variância 1.

- **Discretização de *Milstein*:**

O método de *Milstein*[21] permite discretizar equações diferenciais estocásticas com ordens de convergência mais altas, o que permite aumentar a precisão da aproximação em detrimento de um menor número de operações em cada simulação.

Pela discretização de *Milstein*, no caso do modelo SABR o processo F fica

$$\hat{F}(t_{i+1}) = \hat{F}(t_i) + \hat{\alpha}(t_i)\hat{F}(t_i)^\beta \Delta W_{\hat{F}}(t_{i+1}) + \frac{1}{2} \beta \hat{\alpha}(t_i)^2 \hat{F}(t_i)^{(2\beta-1)} \left((\Delta W_{\hat{F}}(t_{i+1}))^2 - \Delta t \right)$$

e o processo da volatilidade α é, no caso discreto,

$$\hat{\alpha}(t_{i+1}) = \hat{\alpha}(t_i) + \nu \hat{\alpha}(t_i) \Delta W_{\hat{\alpha}}(t_{i+1}) + \frac{1}{2} \nu^2 \hat{\alpha}(t_i) \left((\Delta W_{\hat{\alpha}}(t_{i+1}))^2 - \Delta t \right).$$

A versão discretizada da componente estocástica do modelo é

$$\begin{aligned} \hat{F}(t_{i+1}) &= \hat{F}(t_i) + \hat{\alpha}(t_i)\hat{F}(t_i)^\beta \sqrt{t_{i+1} - t_i} Z(t_{i+1}) \\ &\quad + \frac{1}{2} \beta \hat{\alpha}(t_i)^2 \hat{F}(t_i)^{(2\beta-1)} \left(Z(t_{i+1})^2 - 1 \right) \sqrt{t_{i+1} - t_i} \end{aligned} \quad (4.30)$$

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}(t_{i+1}) &= \hat{\alpha}(t_i) + \nu \hat{\alpha}(t_i) \sqrt{t_{i+1} - t_i} \left(\rho Z(t_{i+1}) + \sqrt{1 - \rho^2} Y(t_{i+1}) \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \nu^2 \hat{\alpha}(t_i) \left(\left(\rho Z(t_{i+1}) + \sqrt{1 - \rho^2} Y(t_{i+1}) \right)^2 - 1 \right) \sqrt{t_{i+1} - t_i} \end{aligned} \quad (4.31)$$

e

$$\Delta W_{\hat{F}}(t_{i+1}) = Z(t_{i+1})\sqrt{t_{i+1} - t_i} \quad (4.32)$$

$$\Delta W_{\hat{\alpha}}(t_{i+1}) = \left(\left(\rho Z(t_{i+1}) + \sqrt{1 - \rho^2} Y(t_{i+1}) \right)^2 - 1 \right) \sqrt{t_{i+1} - t_i}. \quad (4.33)$$

Algoritmo de simulação.

Fixado o número de simulações N_{sim} e o número de passos de tempo N_{step} até à data t , considera-se o seguinte procedimento para o método de Milstein, sendo análogo para o método de Euler-Maruyama:

- Para cada $n \in \{1, \dots, N_{sim}\}$ amostram-se N_{step} variáveis aleatórias $Y_{n,i} \sim N(0, 1)$ e N_{step} variáveis aleatórias $Z_{n,i} \sim N(0, 1)$ com $i \in \{1, \dots, N_{step}\}$.
- Para cada $i \in \{1, \dots, N_{step}\}$
 - calculam-se $\Delta W_{\hat{F}}(t_{i+1})$ (4.33) e $\Delta W_{\hat{\alpha}}(t_{i+1})$ (4.32) com $Y_{n,i}$ e $Z_{n,i}$;
 - calcula-se o valor $\hat{\alpha}(t_{i+1})$ (4.31) com $\Delta W_{\hat{\alpha}}$;
 - calcula-se o valor $\hat{F}(t_{i+1})$ (4.30) com $\hat{\alpha}(t_{i+1})$ e $\Delta W_{\hat{F}}$.

4.4.3 Densidade de probabilidade

Uma das ferramentas mais importantes que o modelo SABR permite obter é a função de densidade de probabilidade do preço futuro de um ativo financeiro.

Considere-se um conjunto de caplets sobre $F_k(t_{k-1})$ contratados na data s e que diferem no preço de exercício y . A função $p(F_k(t_{k-1}), t_{k-1})$ pode ser aproximada a partir desse conjunto de caplets através da relação (1.17) especificando os restantes parâmetros, em particular a volatilidade calibrada pelo modelo SABR. Fixando Δy pelo método das diferenças finitas obtém-se,

$$p(F_k, t_{k-1}) \approx \frac{\hat{\pi}(H^E(t_{k-1}, t_k, y - \Delta y)) - 2\hat{\pi}(H^E(t_{k-1}, t_k, y)) + \hat{\pi}(H^E(t_{k-1}, t_k, y + \Delta y))}{\Delta y^2}. \quad (4.34)$$

O mesmo resultado é válido para floorlets.

Aproximação de HLW

Seja t a data atual e considere-se a data $u > t$.

Em [12] é apresentado um procedimento para obter assintoticamente a função de densidade de probabilidade de $F(u)$ com maior precisão e que visa corrigir alguns problemas de convergência relacionados com preços de exercício baixos e com o comportamento do

modelo quando $F(u)$ tende para zero.

Seja $z = u - t$. O resultado principal de [12] é a fórmula assintótica da densidade de probabilidade de $F(u)$ condicionada pela σ -álgebra $\mathcal{F}(t)$,

$$p(t, u, F(t), \alpha(t)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi z}} \frac{1}{\alpha(t)C(F(t))I^{\frac{3}{2}}} \exp\left(-\frac{D^2}{2z\nu^2}\right) \cdot \left(1 + \frac{\alpha(t)C'(F(t))D}{2\nu\sqrt{1-\rho^2}I} - \frac{1}{8}z\nu^2\left(1 + \frac{\alpha(t)C'(F(t))D}{2\nu\sqrt{1-\rho^2}I} + \frac{6\rho\alpha(t)C'(F(t))}{\nu\sqrt{1-\rho^2}I^2}\cosh(D) - \left(\frac{3(1-\rho^2)}{I} + \frac{3\alpha(t)C'(F(t))(5-\rho^2)D}{2\nu\sqrt{1-\rho^2}I^2}\right)\frac{\sinh(D)}{D}\right) + \dots\right), \quad (4.35)$$

onde

$$C(x) = (x + s)^\beta, \text{ se } 0 \leq \beta < 1,$$

$$\zeta = \begin{cases} \frac{\nu}{\alpha(t)} \frac{(F(t)+\mu)^{1-\beta} - (y+\mu)^{1-\beta}}{1-\beta}, & \text{se } 0 < \beta < 1, \\ \frac{\nu}{\alpha(t)} \log\left(\frac{F(t)+\mu}{y+\mu}\right), & \text{se } \beta = 1, \end{cases}$$

$$I(\zeta) = \sqrt{\zeta^2 - 2\rho\zeta + 1} = \cosh(D(\zeta)) - \rho \sinh(D(\zeta)),$$

$$D(\zeta) = \log\left(\frac{\sqrt{\zeta^2 - 2\rho\zeta + 1} + \zeta - \rho}{1 - \rho}\right),$$

Esta abordagem permite não só calcular uma aproximação analítica da densidade de probabilidade como comparar com a densidade de probabilidade obtida por simulação de *Monte Carlo*.

De acordo com as abordagens descritas para as etapas de calibração do modelo e previsão de preços futuros foram desenvolvidas funções em linguagem *R* para efetuar simulações. De seguida serão apresentados alguns desses resultados.

4.4.4 Resultados para taxas de swap associadas à taxa EURIBOR a 6 meses

Considere-se uma swaption contratada na data s , com data de exercício t_m sobre um contrato de swap com maturidade na data t_n , preço de exercício y , e em que $S = (S_{m,n}(t))_{t \leq t_m}$ é o processo das taxas de juro simples a prazo (1.34) sobre o qual se exerce a opção, como definido em (4.3).

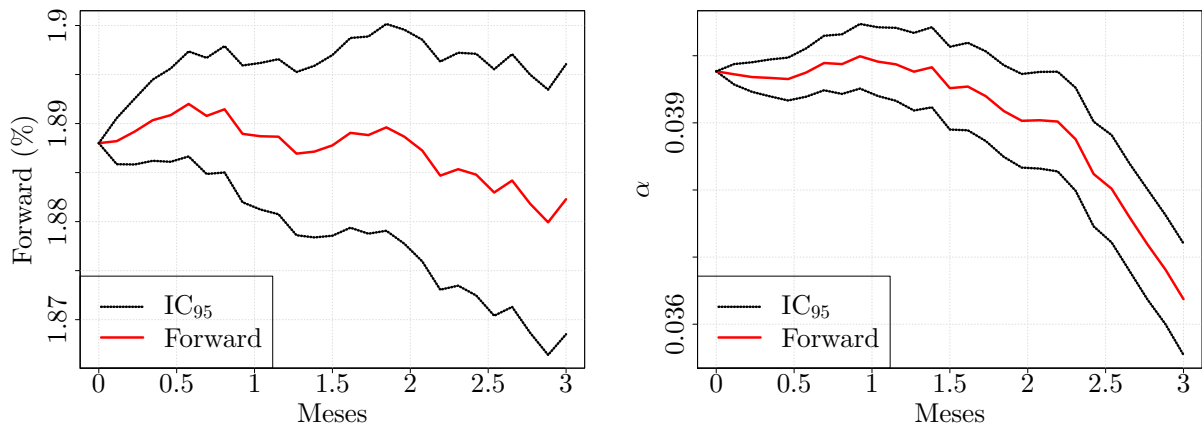


Figura 4.5: Caminhos aleatórios médios obtidos para os processos F e α da taxa de juro de swap a 3 meses com tenor de 10 anos com dados de 17-03-2014 . $N_{step} = 27$ e $N_{sim} = 10^4$.

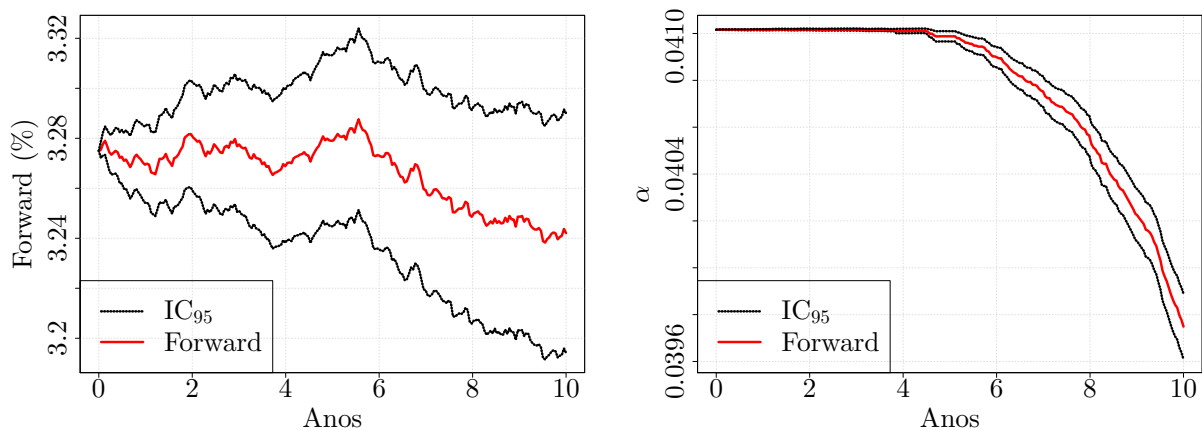


Figura 4.6: Caminhos aleatórios médios obtidos para os processos F e α da taxa de juro de swap a prazo a 10 anos com tenor de 10 anos com dados de 17-03-2014. $N_{step} = 236$ e $N_{sim} = 10^4$.

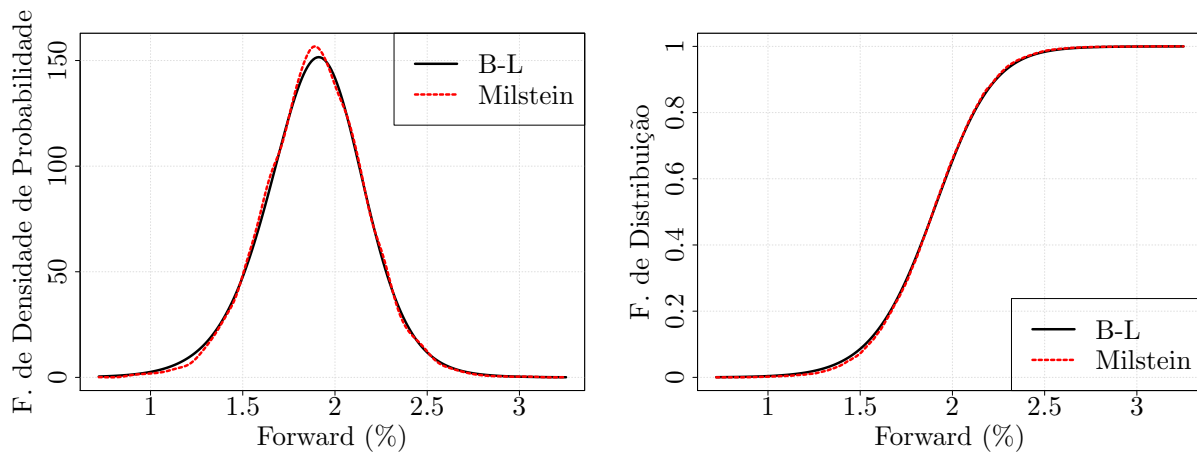


Figura 4.7: Funções de densidade de probabilidade e de distribuição da taxa de juro de swap F a prazo a 3 meses com tenor de 10 anos com dados de 17-03-2014.

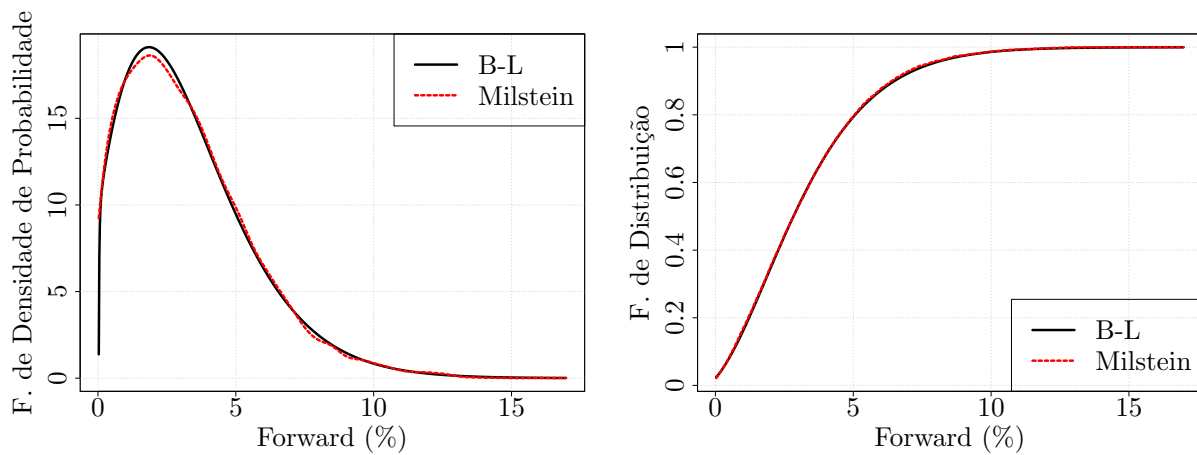


Figura 4.8: Funções de densidade de probabilidade e de distribuição da taxa de juro de swap F a prazo a 10 anos com tenor de 10 anos com dados de 17-03-2014.

As funções de densidade de probabilidade obtidas pela via analítica (4.34), a que se chamou Hagan, e pela via de simulação de Milstein são semelhantes. O investidor pode agora tomar decisões para a compra ou venda de uma opção europeia associada a esta taxa futura, com uma referência probabilística para o risco em que incorre.

4.4.5 Resultados para a taxa EURIBOR a 6 meses

Para chegar aos resultados apresentados de seguida foi necessário fazer o stripping da volatilidade utilizando caps de mercado antes de proceder à calibração do modelo e posterior

simulação. Por se estar a considerar a EURIBOR a 6 meses a prazo associada a um caplet com o mesmo tenor, as taxas de juro previstas são mais baixas quando comparadas com os resultados para taxas de juro de swap. Esta característica do exemplo dado revela que para taxas muito próximas de 0 as funções de densidade obtidas analiticamente e por simulação começam a divergir. O que foi reforçado com testes realizados para outras datas e que não são apresentados.

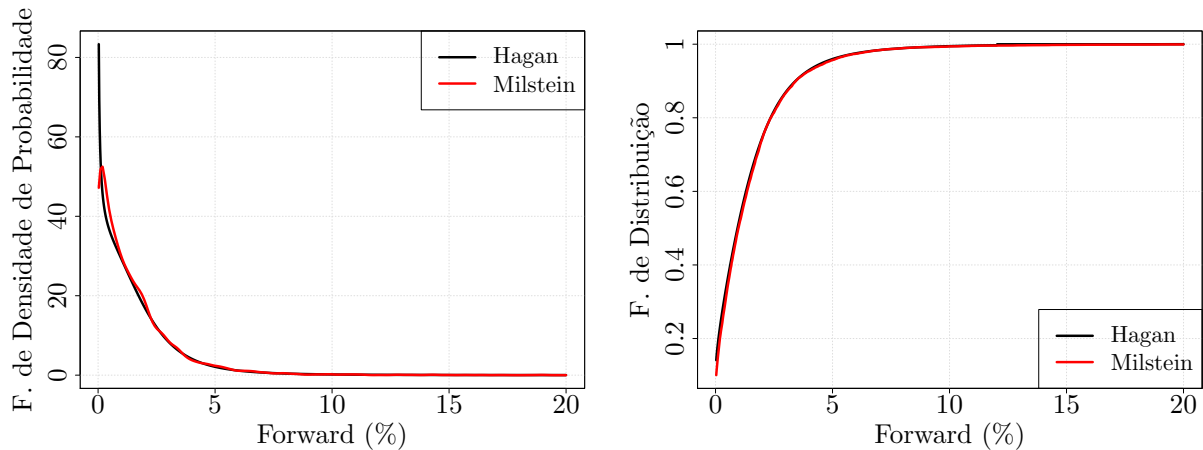


Figura 4.9: Funções de densidade de probabilidade e de distribuição da EURIBOR a 6 meses considerando caplets a 3 anos de 17-03-2014.

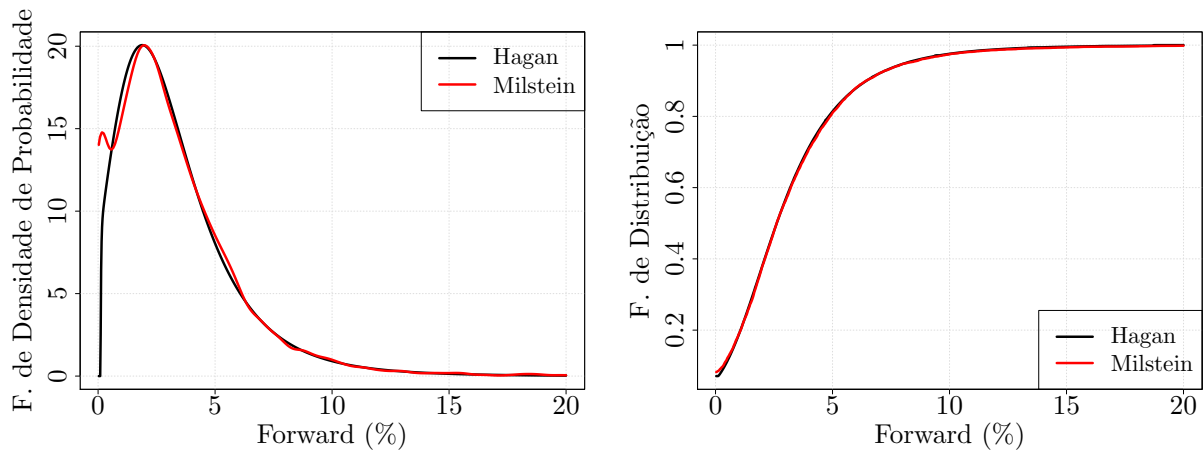


Figura 4.10: Funções de densidade de probabilidade e de distribuição da EURIBOR a 6 meses considerando caplets a 8 anos e 6 meses de 17-03-2014.

Conclusões

A investigação desenvolvida no decorrer deste trabalho permitiu tomar consciência da importância de alguns instrumentos estruturais do mercado financeiro como sejam as taxas LIBOR ou EURIBOR. Em torno destes instrumentos há um enorme leque de derivados, por exemplo taxas de juro indexadas, derivados *vanilla* ou derivados exóticos que são influenciados pela sua dinâmica.

No decorrer dos trabalhos, uma das dificuldades encontradas prendeu-se com o difícil acesso a dados OTC², o que reforça a ideia de que o mercado de taxas de juro é estrutural e tem poucos intervenientes, comparativamente com outros sectores do mercado financeiro como o *Forex*.

No plano inicial pretendia-se estudar o modelo SABR-LMM [25] onde se introduz dinâmica à superfície de volatilidade calibrada pelo modelo SABR. O modelo HJM é utilizado neste contexto e por isso foi apresentada a extensão do modelo HJM em tempo discreto ao caso em que tem L factores estocásticos.

O *software* foi desenvolvido de forma genérica, ou seja, em trabalhos futuros a estrutura das funções programadas para o modelo SABR poderá incorporar a implementação do modelo SABR-LMM sem dificuldades de maior.

O contacto com dados financeiros OTC permitiu tomar consciência da complexidade introduzida pelas convenções de mercado e pelas próprias entidades que gerem estas fontes de informação. Um exemplo disso é a reconhecida arbitrariedade na escolha do método de stripping da volatilidade que é usado para gerar dados artificiais que servem para calibrar os modelos que a maioria dos investidores toma como referência, por exemplo caplets. Como foi descrito, o stripping da volatilidade é essencial para a calibração do modelo SABR, um dos modelos de referência para os investidores. Neste trabalho foi usado o método de *bootstrapping* para o algoritmo de stripping, o qual teve bons desempenhos nos testes desenvolvidos.

Do ponto de vista da calibração há um aparente *overfitting* aos dados de mercado. Uma

² *Over-the-counter*.

alternativa seria, recorrendo ao histórico da volatilidade numa janela temporal de alguns dias, por exemplo 3 dias, aumentar o conjunto de dados utilizados na calibração do modelo. Na pesquisa desenvolvida percebeu-se que, por um lado, é prática do mercado fixar previamente parâmetros do modelo estimando os outros (acautelando fenómenos de over-fitting) e, por outro lado, não fazer com uma frequência diária uma calibração do modelo não estando aparentemente de acordo com o que os grandes investidores fazem, pode levar a que quem não siga as práticas usuais "fique fora do mercado". Os resultados obtidos com o modelo SABR são satisfatórios. Como exemplo foram escolhidos expiries baixos comparativamente aos que são tipicamente utilizados na literatura para mostrar que o modelo funciona. Observa-se que mesmo para expiries mais baixos o modelo tem bons resultados.

A forte componente computacional contribuiu para a necessidade de perceber detalhadamente cada passo que vai desde a interpretação e organização dos dados, criação de funções de preparação de dados, funções para o cálculo de elementos instrumentais relacionados com as estruturas a prazo das taxas de juro como sejam taxas de juro de swap a prazo ou fatores de desconto, funções para organização de datas de acordo com as convenções de mercado, funções para a calibração do modelo SABR com as variantes detalhadas no capítulo 4, funções para a simulação de um processo estocástico tendo por base a calibração do modelo SABR e as equações estocásticas que o governam e, funções para cálculo analítico e para a simulação da densidade de probabilidade de um preço futuro.

O presente trabalho reúne conteúdos importantes para um melhor entendimento da calibração do modelo SABR, algo que presentemente não consta da literatura em Português. Como trabalho a realizar no futuro seria interessante implementar computacionalmente o modelo SABR-LMM pela dinâmica que introduz na superfície de volatilidade utilizando o modelo SABR, como já tinha sido mencionado. Uma segunda abordagem interessante seria introduzir mudanças de regime no modelo que caracterizem conjunturas atípicas como sejam catástrofes naturais ou alterações de estratégias económicas usando, por exemplo, modelos semi-markovianos que conduzam o processo de mudança de regime.

Apêndices

Apêndice A

Lista de Funções	
Nome da Função	Descritivo
YearFraction	Cálculo do tempo entre datas em anos segundo as convenções de mercado.
ir2fr	Cálculo da taxa de juro livre de risco a prazo a partir da estrutura a prazo observada das taxas de juro à vista.
zr2fsr	Cálculo da taxa de swap a prazo a partir de uma curva de desconto.
EuropeanOption	Cálculo do preço de uma opção europeia pela fórmula de Bachelier ou pela fórmula de Black Scholes.
CapletPriceBlack	Cálculo do preço de um caplet pelo modelo de Black.
Price2BlackIvol	Cálculo da volatilidade implícita de uma opção europeia.
CapPriceBlack	Cálculo do preço dos caps artificiais gerados no algoritmo de stripping da volatilidade.
CapVolStripBoot	Algoritmo de stripping da volatilidade.
CapletResetDates	Cálculo de todas as datas relevantes para o algoritmo de stripping.

Tabela 2: Descrição de algumas funções programadas: taxas de juro, datas e stripping da volatilidade.

Lista de Funções	
Nome da Função	Descritivo
SABR.IVol	Cálculo das volatilidades normal e lognormal pelas aproximações de Hagan e Obloj.
SABR.optimARN	Calibração de α_0 , β , ρ , ν com β fixo. Permite refinamento de α_0 , e aproximações de Hagan ou de Obloj para volatilidades normais ou lognormais.
SABR.optimABRN	Calibração de α_0 , β , ρ , ν . Primeiro otimiza β com os restantes parâmetros fixados. Chama SABR.optimARN dando o melhor β como argumento.
SABR.MonteCarlo	Simulação por métodos de Monte Carlo a taxa de juro futura pelo método de Euler-Maruyama ou pelo método de Milstein.
MonteCarlo.dpqfun	Cálculo das funções de distribuição, densidade e quantil resultantes da simulação de Monte Carlo.
SABR.FdensHagan	Cálculo da densidade de probabilidade do preço futuro pela aproximação de Hagan.
SABR.FdensHLW	Cálculo da densidade de probabilidade do preço futuro pela aproximação de HLW.
SABR.density	Cálculo da densidade de probabilidade do preço futuro por simulação de Monte Carlo (MonteCarlo.dpqfun) ou de forma analítica pelas fórmulas de Hagan (SABR.densityHagan) ou HLW (SABR.densityHLW).

Tabela 3: Descrição de algumas funções programadas: calibração do modelo SABR e cálculo da densidade de probabilidade de preços futuros.

Grupo de funções	Nº de linhas de código	Nº de funções
Preparação de dados	≈ 220	5
Convenções de mercado	≈ 1450	51
Taxas de juro	≈ 350	19
SABR (calibração)	≈ 1000	18
SABR (densidade)	≈ 1200	8
Desmantelamento	≈ 600	5
Total	$\approx \mathbf{3920}$	106

Tabela 4: Descrição de alguns grupos de funções criados.

Bibliografia

- [1] Jozsef Abaffy, Marida Bertocchi e Adriana Gnudi. “Extensions of the Ho and Lee interest-rate model to the multinomial case”. Em: *European Journal of Operational Research* 163.1 (2005), pp. 154–169.
- [2] Banking Federation of the European Union. *"FBB Master Agreement for Financial Transactions, Supplement to the Derivatives Annex"*. Interest Rate Transactions. 2004.
- [3] Tomas Björk e Bent Jesper Christensen. “Interest Rate Dynamics and Consistent Forward Rate Curves”. Em: *Mathematical Finance* 9.4 (1999), pp. 323–348.
- [4] Fischer Black. “The pricing of commodity contracts”. Em: *Journal of Financial Economics* 3.1 (1976), pp. 167–179.
- [5] Fischer Black e Myron Scholes. “The Pricing of Options and Corporate Liabilities”. Em: *Journal of Political Economy* 81.3 (1973), pp. 637–54.
- [6] Douglas T. Breeden e Robert H. Litzenberger. “Prices of State-contingent Claims Implicit in Option Prices”. Em: *The Journal of Business* 51.4 (1978), pp. 621–51.
- [7] Emanuel Derman e Iraj Kani. “Riding on a Smile”. Em: 7 (jan. de 1994).
- [8] Bruno Dupire, The Black–Scholes Model (see Black e Givens Options. “Pricing with a Smile”. Em: *Risk Magazine* (1994), pp. 18–20.
- [9] R.J. Elliott e P.E. Kopp. *Mathematics of Financial Markets*. Mathematics of financial markets v. 10. Springer, 2005.
- [10] Jim Gatheral. “Stochastic Volatility and Local Volatility”. Em: *The Volatility Surface*. John Wiley & Sons, Inc., 2012, pp. 11–12.
- [11] Patrick Hagan e Michael Konikov. *Interest Rate Volatility Cube: Construction And Use*. 2004.

- [12] Patrick Hagan, Andrew Lesniewski e Diana Woodward. “Probability Distribution in the SABR Model of Stochastic Volatility”. Em: *Large Deviations and Asymptotic Methods in Finance*. Ed. por Peter K. Friz et al. Cham: Springer International Publishing, 2015, pp. 1–35.
- [13] Patrick Hagan et al. “Managing Smile Risk”. Em: 1 (jan. de 2002), pp. 84–108.
- [14] David Heath, Robert Jarrow e Andrew Morton. “Bond Pricing and the Term Structure of Interest Rates: A Discrete Time Approximation”. Em: *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 25.04 (1990), pp. 419–440.
- [15] Marc P. A. Henrard. “Interest Rate Instruments and Market Conventions Guide, (April 2, 2012)”. Em: OpenGamma Quantitative Research, First Edition, April 2012.
- [16] Thomas S.Y. Ho e Sang-Bin Lee. “Term Structure Movements and Pricing Interest Rate Contingent Claims”. Em: *The Journal of the American Finance Association* (1986).
- [17] J. J. Moré. “The Levenberg-Marquardt algorithm: implementation and theory”. Em: *Lecture Notes in Mathematics 630: Numerical Analysis G.A. Watson (Ed.)* Springer-Verlag: Berlin, 1978, pp. 105–116.
- [18] Fabien Le Floc’h e Gary J. Kennedy. “Explicit SABR Calibration Through Simple Expansions”. Em: (jan. de 2014).
- [19] David M. Gay. “Usage Summary For Selected Optimization Routines”. Em: 153 (jun. de 1991).
- [20] J. Huston McCulloch. “The Tax-adjusted Yield Curve”. Em: *The Journal of Finance* 30.3 (1975), pp. 811–830.
- [21] G. N. Milstein. “Approximate Integration of Stochastic Differential Equations”. Em: *Theory of Probability & Its Applications* 19.3 (1975), pp. 557–562.
- [22] Charles Nelson e Andrew F Siegel. “Parsimonious Modeling of Yield Curves”. Em: *The Journal of Business* 60.4 (1987), pp. 473–89.
- [23] Jan Obloj. “Fine-Tune Your Smile: Correction to Hagan et al”. Em: 35 (ago. de 2007).
- [24] Riccardo Rebonato. “Pricing Options in the Presence of Smiles”. Em: *Volatility and Correlation*. John Wiley & Sons Ltd, 2004, pp. 165–199.
- [25] Riccardo Rebonato, Kenneth McKay e Richard White. *The SABR/LIBOR Market Model: Pricing, Calibration and Hedging for Complex Interest-Rate Derivatives*. John Wiley & Sons Ltd, 2009.

- [26] Daniel Revuz e Marc Yor. “Continuous Martingales and Brownian motion-Grundlehren der mathematischen Wissenschaften”. Em: *Continuous Martingales and Brownian motion-Grundlehren der mathematischen Wissenschaften*. Vol. 293. Springer, 1999.
- [27] Lars Svensson. *Estimating and Interpreting Forward Interest Rates: Sweden 1992 - 1994*. NBER Working Papers 4871. National Bureau of Economic Research, Inc, 1994.
- [28] Graeme West. “Calibration of the SABR Model in Illiquid Markets”. Em: *Applied Mathematical Finance* 12.4 (2005), pp. 371–385.